IACOBI PELETARII CENOMANI,

In Euclidis Elementa Geometrica Demonstrationum Libri sex.

Ad Carolum Lotharingum, Principem, Cardinalemq; amplissimum.

LVGDVNI,
APVD IOAN. TORNAESIVM
ET GVL. GAZEIVM.
M. D. LVII.

Cum Priuilegio Regis.

Priuilegij summa.

LITERIS *Regys cautum est Joanni Tornæsio, Nequis iniussu in tota Galliarum ditione has Iacobi Peletary Cenomani Demonstrationes hinc ad sextum vsque annum imprimat, néue vspiam impressas vendat. Qui secùs fecerit, pœnis ex sanctione multabitur. Datum Fonsbellaquei,* IIII *Non. Maias* M. D. LV.

Quæ ad hos ſex libros Elementorum contulimus præcipua.

NOVAS Demonſtrationes paſſim ad Euclidem adiecimus: quas ex firmiſſimis probationum fundamentis, Recto & Æquali, maximè ex Circulo, totius operis Geometrici archetypo, deprompſimus.

Demonſtrationes nonnullas Theonis & Campani, quum non ſatis probabiliter, aut non ſatis appoſitè confirmarent, emendauimus: cæteras concinniores clarioresq́; reddidimus.

Improprias Demonſtrationes à Geometria excluſimus: illas ſcilicet, quæ Figurarum, quas vocant, ſuperpoſitionibus nitebantur.

Demonſtrauimus ad decimamſextam Tertii, quam nos decimāquintam fecimus, neque lineæ rectæ cum Circulo, neque Circulorum inter ſe contactū, quantitatem eſſe: Idq́, præter Euclidis ſententiam. Et paralogiſmos inde ortos à Geometria depulimus.

Ibidem explicauimus quánam ratione duæ lineæ in eodem plano non paralleli, concurrere non poſſint: tum ex quo genere eſſet altera illarum oſtendimus. Dubitatio ſcilicet iam tot ſeculis inter Geometras indiſſoluta.

Nouas Propoſitiones à nobis demonſtratas ſuis locis appoſuimus: nullas tamen in ordinem redegimus. Seriem enim Elementorum ab Euclide collocatam ſuæ integritati reliquimus: niſi ſiquando Campanum ſecuti ſumus, quum in varietate nonnihil compendii deprehenderemus. numerum tamen Theonis vbique ſubſcripſimus. Illas autem potiſſimùm de noſtris addidimus Propoſitiones, quæ ad effectionem Geometriæ perrinebant: vt ad ſcientiā vſum adiungeremus.

Principia Geometriæ nouis meditationibus illuſtrauimus, Punctum, Lineam, Superficiem, Circulum ipſum. Sed & Anguli naturam, conformationem, conſtitutionemq́, hactenus non animaduerſam explicauimus ad duodecimam Definitionem Primi, tum ad decimamquintam Propoſitionem Tertii.

Quinti Libri Definitiones Geometricè declarauimus, earumq́; ſuſpectam difficultatem ſuſtulimus.

Rerum naturam in Geometria tanquam in ſpeculo elucere, eamq́; è Geometricis ſpeculationibus petēdam eſſe docuimus: quod paſſim agnoſcent qui commentationibus noſtris operam daturi ſunt.

Euclidis verba non religioſè, ſed ſententiam fideliter ſequuti ſumus: &

A 2 latinè,

latinè, quoad eius fieri potuit, expressimus.

Ad Demonstrationum autem formulas, vix mediocrem ornatum attulimus verborum. Apertam enim simplicitatem retinere maluimus, quàm nimis obscuram diligentiam affectare. Atque haud scio an hoc argumentum Romanæ linguæ facultatem superet. Geometria quippe se ad Latinos tum recepit, quū iam apud eos iaceret dicendi studium. Quod quum dico, non iam Impossibilis vocem significo, duram illam quidem M. Fabio, tamen Vlpiano receptam, Capite Non impossibile puto, Legis De Pactis: sed alias satis multas, quæ arti sic inhærebant, vt ab arte excuti non possent. Quinetiam integras periodos, nulla modorum aut numerorum ratione seruata, exhibere coacti sumus: dum crebras notarum verborumq; iterationes fieri necesse fuit: argumento alioqui parum tractabili. Sed cesso de his admonere. Verborū enim curiositas, ad rerum pondera (quas solas spectat Geometria) parum affert momenti.

Atque hæc sunt quibus nostram demonstrandi Euclidis rationem exponendam esse duximus.

Quæ verò à nobis adiectæ sunt Propositiones, sic habent.
Libro Primo.

AD XV PROPOSITIONEM.

Si quatuor lineæ ab vno puncto exeuntes, quatuor angulos fecerint, quorum bini oppositi æquales fuerint: binæ aduersæ in rectum sibi erunt & linea vna.

AD XXIII.

Dato Triangulo Triangulum æquale & æquilaterum constituere.

AD XXIX.

Si duæ rectæ lineæ quæ duas parallelos secant, inter ipsas ad vnum punctum coierint, duosq; angulos alternos æquales fecerint, aut angulum exteriorem interiori sibi opposito ex eadem parte æqualem, aut denique duos interiores ex alterutra parte duobus rectis æquales: eæ duæ lineæ in continuum erunt & linea vna.

AD XXXIIII.

Inter duas lineas interminatas ad angulum datum coniunctas, lineam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum alteri dato angulo æqualem. Oportet autem duos angulos datos duobus rectis esse minores.

AD XXXVIII.

Datum Triangulum in duo æqualia partiri.

A puncto in vno laterum Trianguli signato lineam ducere, quæ Triangulum bifariam diuidat.

AD XXXIX.

Si linea recta duo Trianguli latera per æqualia secuerit, ipsa erit tertio lateri æquidistans. Ex Campano.

AD XLII.

Dato Parallelogrammo æquale Triangulum constituere, habens angulum angulo dato æqualem.

AD

AD XLIII.

Si Parallelogrammum in duo Supplementa æqualia, duoq́ quantacunque Complementa diuisum fuerit: duorum Complemētorum dimetientes in continuum erunt, & vna totius Parallelogrammi dimetiens.

AD XLIIII.

Super data recta linea dato Parallelogrammo æquale Triangulum cōstituere, habens angulum angulo dato æqualem.

AD XLV.

Propositis duabus Superficiebus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minorem cognoscere.

AD XLVI.

Quæ circa Diametrum Quadrati Parallelogramma, sua latera Quadrati lateribus æquidistantia habuerint, Quadrata esse oportet.

AD XLVII.

Duo Quadrata inæqualia ad duo Quadrata æqualia reducere.

Si duo Triangula rectangula æquales subtensas habuerint, Quadrata duorum reliquorum laterum vnius, erunt æqualia quadratis duorum reliquorum laterum alterius.

Propositis duabus lineis inæqualibus, potentiam maioris supra minorem cognoscere.

Data Diametro, componere Quadratum cuius est Diameter.

Quadratum Diametri, duplum est Quadrati cuius est Diameter.

AD XLVIII.

Propositis duobus Quadratis, alteri illorum Gnomonem reliquo æqualem adiungere. Et est Campani: quam tamen nos compendiosius demonstrauimus.

Secundo libro nullas Propositiones interiecimus.

Libro Tertio.

AD VII.

Si duæ lineæ rectæ ab aliquo puncto Diametri exeuntes, angulos æquales cum Diametro fecerint: ipsæ sunt æquales.

AD XV, quæ est Theoni XVI.

Contactus duorum Circulorum interior, quantitas non est.

Contactus lineæ rectæ cum Circulo, quantitas non est.

Contactus duorum Circulorum exterior, quantitas non est.

Anguli qui fiunt à Diametro & Peripheria, siue intra siue extra Circulum: recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

AD XVI.

Lineæ rectæ quæ Circulum secet, lineam rectam quæ Circulum tangat parallelum ducere.

AD XXX.

Si in Circulo Triangulum rectangulum inscriptum fuerit: latus recto angulo oppositum, Diameter erit Circuli.

AD

AD XXXV.

Si ab eodem puncto extra Circulum signato plures lineæ Circulum secent: quæ ex vnaquaque in sui partem extimam fiunt Rectangula, inter se sunt æqualia.

Si duæ lineæ ab eodem puncto ductæ, Circulum tetigerint, ipsæ inter se sunt æquales.

Atque hæ duæ posteriores sunt Campani.

Ab vno puncto extra Circulum signato duæ tantùm lineæ ad contactum Circuli demitti possunt.

Libro Quarto.

AD V.

Per tria data puncta in directam lineam minimè constituta, Circulum ducere.

AD IX.

Quadratum Circulo circunscriptum, duplum est Quadrati eidem Circulo inscripti.

AD X.

Super data recta linea Pentagonum æquilaterum & æquiangulum constituere.

Ad Librum Quintum nullas Propositiones addidimus, eodem quo neque ad Secundum, consilio. Quæ enim cum Numeris tam coniunctã habent rationem, sicut Secundi & Quinti materia, præter modum ampliari possunt, ac sine vsu. Quinetiam ab hoc Quinto rescindendæ potius essent Propositiones, quàm vllæ adiiciendæ: quod & nos illic monuimus.

Libro Sexto.

AD IX.

Dato Medio proportionali, in data linea duo extrema reperire. Oportet autem Medium datum dimidia parte lineæ datæ non esse maius.

AD XXIII.

Propositis duobus Parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ab vno illorum Parallelogrammum alteri simile resecare.

Inter duas Superficies rectilineas mediam Superficiem rectilineam inuenire.

AD XXXII.

Si, quæ ab vno laterum Trianguli fit Species, æqua fuerit iis quæ à duobus reliquis lateribus fiunt Speciebus similibus similiterq; descriptis: Rectangulum est ipsum Triangulum.

AD CAROLVM LOTHARINGVM, PRINCIPEM, CARDINALEM'QVE AMPLISSIMVM,

Iacobi Peletarii Cenomani in Euclidis Elementa Geometrica Præfatio.

SOlent, qui docendi munus profitentur, Cardinalis amplißime, multa de argumenti ipsius dignitate afferre: vt consilij suscepti rationem exponant, & animos hominum faciliùs sibi adiungant. Ego verò ad Geometriam accedens, præter officium & dignitatem mihi facere viderer, si ad eius commendationẽ, nimis exquisitum artificium adhiberem. Nam quum cæteræ artes probabili quadam opinione constent, certè Geometria (inter Mathematicas spectatißima) veritatis confirmatione seipsam tuetur & commendat. Quumq́ res omnes aut ornatu amplificare, aut testimonio deprimere, aut deniq́ circuitione inuertere poßimus: hæc ipsa suo innixa præsidio, perpetua, simplex & vniusmodi est. Nulla huc controuersia, nulla disceptatio incidit, quæ non statim ad veritatis fidem probationemq́ referatur. Eius quippè rationes non persuadent, sed cogunt: etiam ordine ipso, immò adeò Naturæ ductu quodam. Ut enim ab exiguis initijs, Natura ad operis perfectionem & absolutionem sensim peruenit: ita Geometria ab infimis ad altißima, rectè & gradatim sese extollit. Quid Puncto simplicius? quid Circulo absolutius? at ex illo omnia emanant, in hoc omnia concluduntur. Ut ne Puncto quidem desit infinitatis admiratio. Quid enim tam mirabile, quàm à medij Circuli puncto, quod Centrum vocamus, tot lineas exire, quot ad Peripheriam desinunt? Iam verò Problemata ipsa & Theoremata, quum alia ex alijs consequantur, rerum agendarum seriem nobis opportunè referunt: monentq́ nihil præposterè, nihil sine consilio aggrediendum, sed omnia ad rationis normam esse dirigenda. Ad hæc, sicut Natura noui quippiam aßiduè molitur, ita Geometria semper aliquid egregium dispicit, exquirit, excogitat. Quamobrem parum intelligenti sunt iudicio, qui Mathematicarum autoritatem eleuare conantur, tanquã eæ ad animi delectationem, non etiam ad vitæ vsum constitutæ sint. Nihil enim in rebus humanis ferè aliud est quod expediat aut iuuet, præter ordinem & proportionem: id est, in omnibus moderationem. Ubiq́ igitur latet vis quædam Geometriæ: quæ vtrum plus naturæ

habeat

habeat an artificij, non satis perspici potest: nisi quatenus explicat ipsa exercitatio. In qua meditatione quanto maiores progressus fecerimus, tanto propiùs ad Deum accedere videmur. Ac quemadmodum Mens illa æterna, præteritorum meminit, præsentia cernit, futura perspicit, simul verò omnia amplectitur & moderatur: ita præclarus Geometriæ artifex suas cogitationes in vnũ collatas, ad rem suam cõuertit, et suum quendam Mundum vniuersa speculatione intuetur. In diuersis autem Figurarum formis, quæ rerum varietatem eximiè referunt, incredibilem concipit voluptatẽ. Quarum quæ speciem habent cõcinnitatis, rerum vsum et opportunitatem exhibent: quæ obscuram præ se ferunt compositionem, earum incommoditatem arguunt, & molestiam. Neq; tamen in Geometria quicquam tam anorme aut inuolutum existit, quod ad regulam dirigi non possit, si adsit vis ingenij: Sicut in rerum natura nihil tam difficile aut intempestiuum videtur esse, quod non ad vsum conuerti possit, modò non desit animi solertia. Omnia quippè aut ad vtilitatem, aut ad pulchritudinem, aut denique ad exemplum accommodantur: vt etiam quæ ad perniciem generis humani comparata sunt, bella, venena, morbi, cæteraq; exitiorum genera, cautiores nos efficiant, & rerum expetendarum vsus reddant suauiores. Porrò, Geometricæ positiones, quæ operas auxiliarias inter se præstant, omnia in rerum natura mutuis alternisq; subsidijs niti & consistere declarant. Quinetiam amicitiæ ipsius iura, in Figurarum similitudine, quarum colligationem Diameter efficit, conspicua sunt. Ad summam, hæc imago & facies Geometrica eiusmodi est, vt in ea Mundi quandam θεωρίαν possis agnoscere. De cuius initijs huc nihil afferre constitui. Non ab Aegyptijs, non à Chaldæis, non à Phœnicibus, illius originem requiram. Scientias quippè æternas esse semper existimaui: atque vt in Mente diuina, ab æterno infixam fuisse Mundi constitutionem: sic disciplinas, cælestia quedam semina esse: quæ in nobis insita, & pro rata cuiusque portione exculta, fructum edunt. Sed hæc fortaße etiam longiùs à nobis ducta sunt, quàm instituti nostri ratio postularet: præsertim quum hæc ipsa in Commentarijs nostris sparsim exposuerimus. In rem igitur præsentem veniant oportet, qui Geometriæ dignitatem intueri & perpendere cupient. Eam Euclides noster quindecim Libris tradidit. Quorum sex illos qui Planorum tractationem continent, à nobis demonstratos, tuo nomini, Cardinalis amplißime, dicauimus: ne hoc quidem rerum tumultu, aut temporum conuersione deterriti. Nam & tu in summis grauißimisq; occupationibus, artium liberalium caussam, patrociniumq; singulari studio semel susceptum, nunquam deseruisti. Nostros autem labores si benignè & gratè, vt confidimus, exceperis: magnam nobis, etiam sponte currentibus, alacritatem dederis: vt eadem illa tui nominis nuncupatione, totus Euclides quàm poterit cultißimus, versetur inter manus hominum.

✶

IACOBVS PELETARIVS
IOANNI FRATRI, NAVARRÆORVM GYMNASIARCHAE S.

QVòd meas in Euclidem Demonstrationes amplissimo Cardinali Lotharingo tua sponte promisisti & recepisti, pergratū mihi est. Atq; eò etiam gratius, quòd homines intelligunt, id te nō tantùm meo in te amore fretum, sed etiā singulari iudicio inductū, fecisse. Virū enim delegisti ex Principum familia: sui ordinis spectatissimum, sapientia, doctrina, autoritate. Equidem apud me anteà decreuerā, meas lucubrationes, his præsertim temporibus, nullius nomine emittere. Sic enim statuebam, in tanta rerū concertatione, ac perturbatione potiùs, Musas in paruo esse numero apud eos qui studiorum adiuuandorum potestatem haberent: non quòd eos sua voluntate à literis alienos esse iudicarem, sed temporum necessitate distractos, se ad literaturam aut animo aut cogitatione conuertere non posse. Ea etiam re, in meo consilio firmiùs permanebam, quòd ab ijs locis remotus essem, in quibus eius generis occasiones opportunè captare & vrgere solemus. Sed me tua pollicitatio commodè ab instituto reuocauit: mihiq; spatium ad cogitandum dedit, Cardinalem à prima ætate in literis educatum, cuius dignitas & amplitudo cum eruditione accreuit simul, tot iam hominum doctorum nuncupationibus celebratum, immò publicorum studiorum Principem & autorem, nullum tempus ab ingenuis artibus alienum habere posse. Est enim constanti omnium sermone, & rerum ipsarum probatione, quas summas gerit, alta quadam mente præditus, & qui mirabili solertia suis temporibus omnia diuidere nouit. Occurrit tui apud illum non noua notitia, & mei fortasse nominis aliqua commendatio. Quibus rebus non leuiter spero, nobis hunc aditum honori & ornamento futurum. Id verò totū iam inde tibi acceptum refero, & in eximio quodam numero pono tuorum erga me meritorum. Quæ certè tanta sunt, quanta à fratre expectare potui aut debui. Te enim ab ineunte mea adolescentia studiorum meorum moderatorē habui, & in Philosophiæ initijs etiā præceptorē. Ac pòst, emergente ætate, ad vitæ institutionē te mihi prudentissimum monitorē fuisse semper cognoui. Nam quum vestris omnium fratrum consilijs tandiu paruerim, quandiu aut ætas aut naturæ ductus tulit, tibi vni præ cæteris auscultaui. Scis enim me Victorio impulsore, totum penè quinquennium in legum studio consumpsisse. Quod institutum mihi nouitatis studio aliquandiu non displicuit: certè quum ætas ad maturitatem spectare cœpisset, meiq; iuris

ac mancipij essem, vaga illa rerum forensium tractatione deterritus, ad Philosophiam redij, & te autore ad Medicinam me conuerti. In qua me magnoperè delectauit Naturæ locupletissima historia: ad eamq́ professionem satis libenter meæ vitæ modum direxi & composui. Ex illa, me meus Genius ad Magnatum aditum conquirendum interpellauit. Ubi quantùm profecerim, me certè non pœnitet. Quod enim præter animi sententiam accidit, vtrum mea culpa an meo quodam fato acciderit, nihil dico: vnum hoc dico, me ex ea affectatione, ad vitæ rationem multa præcepta reportasse. Hominum enim diuersa consuetudo mihi non parua accessione iudicium confirmauit: & scribendi facultatem comparauit. Nemo enim quicquam laude dignum scribet vnquam, nisi qui rerum ipsarum variam cognitionem ad studium illud vmbratile adhibendam sibi proposuerit. Quippè quum ad scribendum sit Genius quidam, qui si lectione tantùm foueatur, non etiam experientia & vsu roboretur: non consistet, neque ad ætates ferendas idoneus euadet. Atque ea de causa, quæ in Poëticò genere scripsimus, ad temporum memoriam transitura speramus. Certè Oratio nostra Pacificatoria nos rerum non ignaros esse testatur. Quæ verò in Mathematicis scribuntur, ex rata & firma veritatis professione, suum habent Geniũ immortalitatis. Poeticen quidem amplexi sumus, animi impetu & ardore quodam, pòst etiam ingenij concertatione. Sed deferbuit iam illa laudis contentio nostra. Poeticos illos spiritus sensim remitto: Mathematicas in perpetuum retineo. Hæc enim studia mihi destinata esse sentio. Quibus quum anteà delectarer, nunc etiam viuo. Quid facerem? honores non sitio: gloriam non desidero. Interim tamen sic viuo (dicam enim apud te ingenuè id quod res est) tanquam id quod non postulo, expectem. Eas disciplinas colo & amo, non modò quòd, vt ille de re rustica dicebat, minimè malè cogitantes sint qui in eo studio occupati sunt: sed quòd omniũ maximè diuinas esse iudicem. Theologiam vestrã excipio: nisi rerũ diuinarũ cognitio è Mathematicis emersisse concedatur, Platonis testimonio, qui Deũ sine fine γεωμετρεῖν existimabat. Nam quid ego de Numeris dicã? quorum consecutio & natura, imaginẽ quandam æternitatis refert. Rerum concordiam, animorumq́ sympathiã euidentissimè exhibet Musicæ harmonia. Diuini illius opificij principia, & constitutionem certissimis dimensionibus firmatam, obijcit Geometriæ speculatio. Denique ad Deum Optimum Max. suspiciendum, animos nostros erigit rerum cœlestium contemplatio. Quanquam scio te in eo à me valde dissentire. Mihi enim per literas declarasti, Mathematicas vestræ Theologiæ alienas, & propè contrarias esse. Equidem illud de te miror: quum eas artes olim docueris, dum Philosophiæ stadium conficeres: per quas etiam vobis aditum ad vestram disciplinam præstruitis. Quid? an existimabimus veteres Academiarum nostrarũ principes, Mathematicas vt necessarias, præscripsisse, vt post demùm tanquã inutiles, immò contrarias repudiarentur? Sed non est huius loci hæc disputatio. Ad propositũ reuertor. Demonstrationes nostras in sex Libros qui de Planis scripti sunt, iam tandem emittimus. Quod à nobis citius esset factum, nisi operis difficultas Typographos esset remorata. Te igitur promissis libero: & meam fidem iam inde singulari quodam pacto apud Cardinalem astringo: & Deo iuuante præstabo. Neque enim nisi perfecta re, conquiescam vnquam. Uos verò mirum in modum videre cupio, totusq́ Lutetiam vestram cogito, huius longinquitatis temporum & locorum pertæsus. Atque ea re,

hanc

hanc profectionis occasionem mihi esse oblatam vehementer etiam atque etiam lętor. Tu interim me fraternè, quod facis, ama. Alexandro, Victorio, & Petro fratribus, Cenomanos salutem meis verbis scribes, Iuliano istic dices. Uale. V. Id. *Aprilis, Lugduni.*

IACOBVS PELETARIVS PONTO TIARTO S.

QVVM *essem apud te in Bißiano, multumq; ac sæpe de studijs nostris inter nos colloqueremur: dixisti te Euclidem Ciuibus nostris dare constituisse. Idq; libentiùs te facturum esse significasti, quum meas demonstrationes in sex Libros Elementorum priores, tibi ostendissem: quas tibi valde probari sensi. Equidem, cùm mea, tum publica etiam caussa, consilium tuum laudo, & mentem istam tibi gratulor. Neque enim ex amicis chariorem, aut ex nostris hominibus doctiorem mihi optare poteram, qui meas lucubrationes nostra nationi commendaret, quàm te vnum. Quod enim de me dicere soles, me in scribendo tantum industriæ ponere, id ego in teipsum refero: cuius diligentiam & solertiam cùm in rebus omnibus, tum in ipsa scribendi facultate singularē admiror. Quumq; ad meā vtilitatem semper cum Poeticis res Mathematicas coniunxerim, idem tibi vsuuenisse video, & vehementer gaudeo, nostra vtriusque gratia: quò communitas illa studiorum & voluntatum inter nos sit illustrior. Ac tametsi patrio sermone scribere desij, nunquam tamen hanc mea genti gloriam felicitatemq; inuidebo, vt linguam copia, splendore, dignitate, omni denique opum genere auctam & ornatam aliquando habeat. In quod ego officium, summa ope paulò antè nitebar. Id verò nulla ratione commodiùs fiet, quàm si optima quæq; ad ipsam traducantur. Incumbe igitur, mi Tiarte, in eam, vt facis, prouinciam. Tibi enim in isto quo frueris otio, nihil est quod maiori gloriæ aut ornamento esse poßit. Demonstrationes meas ad te mitto. Ex quibus quidquid laudis à temporum memoria ostenditur, id te mecum participare cupio. Quinetiam tu apud nostros non dubito quin maiorem gratiam sis consecuturus, quàm ego: qui iam aliud nihil expecto, quàm vt me primo quoque tempore desertorem appellent. Habent tamen à nobis alia non vnius generis officiorum monumenta: quæ vtinam tam grata sint, quàm ab animo liberali sunt profecta. Nunc ad Romanos transeo. A quibus ampliorem honestioremq; conditionem nescio quo augurio mihi polliceor. Ea enim gens omni memoria, quos semel in fidem recepit, sanctißimè retinuit, & fortißimè propugnauit. Galli verò externorum vnicè amantes, & suorum egregij contemptores semper fuerunt. Quæ res, opinor, effecit, vt me tandem aliquando Gallum profiterer, & ad exteros transfugerem. Sed heus tu, inquies: quò te is perditum? Eiusmodi mores nemo Romanus æquo animo feret. Equidem illos aut omninò mihi exuendos, aut grauiter dißimulandos esse video, nisi quòd caussam meæ defectionis probaturus sum: &, quod caput est, in fide permanebo. Sciunt enim qui me norunt, quàm sim firmus in*

retinendis consilijs. Sed hæc posteriora quanquam tecum iocatus sum, tamen ridentem dicere verum nil vetat. Ad Euclidem redeo: quem, vt instituisti, Gallicè tractabis: hoc est, per te, splendidè: &, per patriam, opiparè. Neque enim tibi verba innouare erit religio in argumenti nouitate. Quæ quum suo charactère insignita erunt, neque lucem reformidabunt, neque ciuitate reijcientur. Demonstrationes nostras concisas illas quidem, sed tamen, ni fallor, appositas comperies. Laconismum verò, si videbitur, longius extendes. Licet enim diffusas Demonstrationes non probem, tamen nostros Ciues huic disciplinæ minimè assuetos, prolixius docere non erit alienum. Siquid autem erit quod diligentiam nostram aut animaduersionem effugerit, id tu repones, amici officio. Nunquam enim doctorum hominum castigationes molestè tuli: sed in hac imprimis tractatione veritatis, etiam imploro. Atque adeò, vt tu sis sciens, ego mea scripta ad Momi lucernam dispici & examinari cuperem: qui etiam in Euclidem animaduerterim, vt iam tum apud vos tibi communicaui. Quinimmò hanc editionem maturaui, vt si quæ essent minus rectè posita (quidni verò futura sunt?) in tempore deprehensa, à me reponerentur in melius. Leuem quippè existimationis iacturam esse iudico, quæ solidam emendationem in perpetuum ostendit. Vellem tamen hæc à me sine causa in dubitationem afferri. Vtut erit, ego non tam properationis pœnas sum daturus (scis enim quandudum hoc saxum voluam), quàm securitatis. Nam in ijs quæ procliuia visa sunt, me ferè præcipitem dedi. Scis etiam me, nisi in difficilibus immorari non solere. Sed nos de his pluribus verbis inter nos. Vale. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS PETRO RONSARDO S.

SCIS quanti te semper fecerim, mi Ronsarde. Me verò abs te non par ui fieri exploratum habeo. Nam & amicitiæ nostræ memoriã mutuo testimonio posteritati prodidimus. Quod certè ad vitam ipsam non parum affert momenti. Habet enim ea publica confirmatio singularem quandam delectationem. Sed & ad me valde pertinere arbitror (neque te aliter esse affectum existimo) vt omnis ætas intelligat, nos non modò temporum, sed etiam animorum coniunctione copulatos fuisse. Igitur ex tuis scriptis voluptatem, & gloriam capio. Etenim ea demùm iucunda & honorifica laus, quæ ab ijs proficiscitur, qui & ipsi in laude viuunt. Id tamen nescio an in laudationis loco sumere debeam, quòd tu me putas ab amore destitisse, & ea re saluum esse. Méne amoris expertem vnquam esse posse? An non ex scriptis meis constantiam, atq; adeò obstinationem meam perspexisti? Immò omninò amore abundo. Ego illa, quam ita superbam & fastidiosam habui, iam vtor benigniore. Quid tu putas? Ex quinq; illis quæ Amor ostendit, præmijs, basium accepi. Sed non pergam tecum alludere. Amorem illum Platonicum significo: hoc est, vt scis, diuinum. Ex quo eum quem percipio fructum, totum statim communico: riualesq; mihi paro, præter amantiũ morem. Atq; adeò in huius felicitatis partem, nullum mihi socium dari malim, quàm teipsum. Scis

enim

enim quanta fuerit dudum inter nos studiorum consensio & conciliatio. Ex quo tempore etiam nobis tertius adscriptus est Ioachimus Bellaius. Qui quum à nobis tam tanto temporum locorumq́ interuallo distractus sit, quo in me sit animo nescio. Id de me scio, me illius memoriam magna cum beneuolentia tenuisse. Necessitudinem enim illam, quæ Musarum beneficio & sanctione constituta est, nulla vi temporum infringi posse iudico. Quod tu perpetuò in nostra amicitia retinenda declarasti. Memini, quum esses etiamnùm adolescens, me aliquot annis superiorem quanta beneuolentia obseruares, Musarum nomine: à quibus quum anteà ad Regiam affectationem abductus fuisses: ad eas te recepisti felicissimo postliminio. Uarium enim & omni numero Poema scripsisti: vt ea quæ hoc tempore sunt apud nostros in manibus, scriptorum genera, multi secuti sint te magistro. Matheseos verò studium, quantam dignitatem afferat operi Poetico, nihil attinet commemorare, apud te præsertim in disciplinis apprimè eruditum. Sed & ipsius Geometriæ lineamenta, quanuis in Poetis minus elucere videantur: ea tamen vna ars caeterarum artium proculdubiò dux & magistra est. Nosti enim Platonis illud peruulgatum, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Ad hac, incredibilem illa voluptatem affert, certissima specio & consecutione præceptorum. Ad quam ego te hortarer, nisi te scirem ad optima quæque tuo ductu amplectenda & consequenda natum & educatum. Habes ad res summas, præcipua illa adminicula, ingenium, genus, fortunas: neque tibi quicquam deest ad benè beateq́ viuendum. Ego verò in eorum studiorum commemorationem incido, animi mei alacritate quadam impulsus: quam mihi parit maximam, eiusmodi meditatio. Quinetiam ad Mathematicas artes cohortationem nuper scribere ingressus soluta oratione, nescio quo impetu in versus erupi: quos è medio transscriptos tibi mitterem, nisi id totum in aliud tempus reseruassem. Eos tamen tibi coràm recitabo, ne me putes Phœbum deseruisse, aut Musas alienas habere: quum etiam Romana poemata pangam. Sic ego sum: sic vtor otio meo: dum tu Principes amplecteris, & in gratia apud eos viuis. Tibi verò seriò gratulor istam fortunæ & genij facilitatem, cui & ad summorum hominum beneuolentiam retinendam, & ad operam studijs & scriptis impendendam abundè tempus suppeditat. Ego autem nihil ex animi sententia, nisi in secessione & solitudine possum scribere. Nos, vt spero, de ijs propediem otiosè colloquemur. Uale: & te à nobis tantùm amari ne dubites, quantùm nos abs te cupimus & confidimus. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS
MAVRICIO SCÆVÆ S.

EXPOSVISTI *aliquando mihi nonnullorum querelas, qui dicerent me nimiùm mihi viuere, atque hominum consuetudini & gratiæ parum seruire. Quod genus expostulationis scis me non prorsùs contempsisse, sed tamen satis leuiter tulisse: præsertim quum, vt præ te ferebas, id non tuo iudicio, sed ex aliena opinione proponeres. Quinetiam te meam caussam suscepisse, & iniquos de me sermones depulisse intellige-*

bam : quod ipſum mihi pro noſtra amicitia gratiſſimum fuit. Fateor, Scæua, me artificia illa beneuolentiæ colligendæ exquiſitè non obſeruare. Probitate enim amicitias mihi comparandas & conſeruandas ſemper exiſtimaui potiùs, quàm gratioſa commendatione, aut affectata diligentia : quanquam, quum opus fuit, mihi non defuerunt adminicula fouendorum hominum. Sciunt ij qui me norunt, quanta fuerit temporum meorum varietas : quam non tam facilè ſuſtinuiſſem, niſi mihi eſſet aliqua non malè ſubducta ad viuendum ratio. Scio ego quàm facilè incidere ſoleam in ſermones hominum : immò adeò, quàm facilè mea fortuna inuidos & obtrectatores inueniat. Quid dico fortunam? fatum dicere debui. Neque enim felicitate inuidiam mihi concitaui : an virtute, neſcio : certè id operam dedi, ne meo merito. Mea ſic ſemper fuit vitæ ratio : Qui mihi res ſuas bona fide commiſerunt, à me nunquam decepti ſunt : qui de mea voluntate non obſcurè dubitarunt, quam alioqui perſpectam non haberent, ijs non admodùm ſuccenſui : ſed vt de me quamoptimè ſentirent ſedulò curaui. Qui verò meam fidem tentare, aut ſimplicitatem intercipere conati ſunt, eorum conſilia aut arte, aut patientia, aut diſtractione eluſi. Qui ſimulatq; ſibi ereptum ſenſerunt quod à mea facilitate ſibi promiſerant, ibi repente ſimultates gerere cœperunt, à me certè non ortas, ſed ab ipſorum artificijs. Nihil enim grauiùs deteſtor, quàm aſtutias : quas ne meo quidem commodo ferre poſſum. Eas autem explorare & olfacere meo periculo didici, ſæpè ab amicis deſertus, non ſemel etiam proditus. De quo apertiùs eſſem conqueſtus, niſi me ad lenitatem finxiſſet natura, ad æquabilitatem Philoſophia : qui ne inimicis quidem reſtiti laceſſitus, niſi ijs quos ſaluis meis rebus miſſos facere non potui. Nemo vnquam ad conquirendas amicitias propenſior, nemo eorum quibuſcum vixi, ſtudioſior fuit, quàm ego ante hoc tempus fuerim. Id quia nimis accuratè feci, multi omnia à mea lenitate ſibi deberi arbitrati ſunt : neque iam integrum mihi eſſe putant à meo more diſcedere. Siquid de illa ſalutationum conſuetudine præterij, ſi inuiſendi officium intermiſi, ſi adeundi copiam non feci, ſi colloquendi facultatem non dedi, me moroſum, me ſingularem eſſe queruntur. In eam verò partem liberalitatis deinceps, ſi potero, non peccabo: ne à me ſit alijs peccandi occaſio. Me iam tempus admonet, vt eam quam ipſi me docuerunt, cautionem mihi adhibeam : & meam familiaritatem abuti deſinam cum ijs qui familiaritate vti neſciunt : Si modò hoc conſilium mihi ratum eſſe poterit : vix certè erit. Noui enim me, quàm ſim φιλανθρωπίας morbo obnoxius. Atenim tempori ſeruiendum. quaſi verò quicquam interſit, vtrum tempori cedas, an ſeruias. Ego quum multorum arbitrio viuere non poſſim, meo modo aliquando mihi viuendum eſſe ſtatui. Totam eam amicorum turbam, qui omnia temporis cauſſa faciunt, non officij, à me excutiam : paucos mihi aptos retinebo, ſi multos nō liceat : quos ego tanti faciam, vt quum ab ijs me amari ſenſero, cæteros qui me non amabunt, neque amicitiæ vim tenere, neque virtutis amantes eſſe putabo. Alij dum verſor in ſolitudine, dum intra eos quos mihi Philoſophia circumdedit cancellos, me contineo : ſe molliter curent : per me licet. Meas res aduerſas, quibus iſti me oppreſſum eſſe putant, faciliùs fortaſſe feram, quàm ipſi ſuas, in quibus volutantur, delicias. Intereà ſiquid præter ſpem acciderit, aut in melius interpretabor, aut arte corrigam : ſiquid boni, id in lucro deputabo, ſicut me Comicus docuit. Si in ea vitæ fabula mihi felicitatis perſona non obtigerit,

virtutis

virtutis certè non deerit. Gaudebo minus, at minus dolebo. Id verò pro mea parte enitar, vt ad omnem vitæ statum subsidia mihi parare poßim. Præter hæc, non tam laborabo quibus charus sim, quàm quibus charus esse debeam. De multis hactenus & priuatim & publicè bene merui. Qui si in officio aliquando erunt, eorum voluntati, quoad potero, non deero: & meam operam bene collocatam esse lætabor: si minus, meorum meritorum & laborum conscientia me consolabor. Sed quàm vellem, vt ij qui meam ab officio, vt ipsi expostulant, cessationem accusant, de meis laboribus cognoscere & iudicium ferre didicissent: ij, vt opinor, me de tota ea accusatione absolui paterentur. Sed in hac re non dubito quin æquis rerum æstimatoribus caussam meam sim probaturus. Eos qui aut præsumpto quodam studio, aut simulatione omnia metiuntur, nihil morabor. En Euclidem meæ in Rempub. perpetuæ voluntatis nouum obsidem offero. In quo vtinam aliquando te occupatum videremus, Scæua. Tum demùm intelligeres, quanta fruantur voluptate ij, qui se à multitudine ad tempus remouent: quanquam id te aliquando expertum esse, res ipsa ostendit. Singulare enim specimen è solitudine edidisti. Sed ea, quam nos in te conspicimus, ingenij solertia maius quippiam à te requirebat. Te Geometria poscere videbatur. Quod à te an expectare debeamus, in te positum est. Si animum induxeris, nihil est quod in Mathematica perceptione non sis effecturus. Te quidem ætas affecta, te minus firma corporis constitutio à laboribus auocant. Scio te valetudini operam dare oportere. At illa, mihi crede, studiorum alacritas, ex summa animi delectatione, corpus tibi confirmabit. Homini tam diuinis rebus dedito non vacat ægrotare. Non valet qui sine studijs viuit. Quinimmò otium absque literis mors est, & viui hominis sepultura. Id verò etiam mea caussa magnoperè expecto. Nam quum te ad solitudinem reductum viderint ij, quibus sermonem dare soleo, eos subitò æquiores ex tua seceßione sum habiturus. Vale. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS
IOANNI FERNELIO FRANCIÆ ARCHIATRO S.

SÆPENVMERÒ *mihi cogitanti de rerum conditione & natura, id vnum in vita difficillimum videri solet, meditationem cum ipsa actione coniungere: id est, mentis functiones ad vsus externos traducere: non quòd vtrunque munus ad hominis ingenium non sit valdè accommodatum, sed quòd speculandi delectatione animus suapte natura præcipuè capiatur: à qua quum ad agendum abstrahitur, minus offitiosus esse cogitur, cum ex insolentia, tum quòd ad res obeundas alieno auxilio indigeat. Quo fit vt pauci sint, qui ad animi studia & ad rerum tractationem æquabiliter sint idonei. Te verò, Ferneli, non possum non laudare, qui vtrunque ea felicitate perficis, vt in otio cum actione: & in negotio cum meditatione versari videaris. Quæ enim in Mathematicis, quæ in Philosophia, quæ in re medica tam diligenter scripsisti, mihi in animum subijciunt, quàm rari sint nostra ætate*

qui cum iudicio scribant. Quo verò successu, quaq; existimatione Medicinam facias, res ipsa loquitur: Cui & Regiæ valetudinis primaria prouincia incumbit: & publica curationis spectata fides. Sed hæc commemoratio ad epistolæ argumentum minus pertinet: nisi quòd gratulationis officium libenter impertiri soleo iis, quibus aut amicitiæ, aut dignitatis nomine id à me deberi puto. Venio ad eam occasionem quæ mihi ad te scribendi præcipua est: nimirùm vt apud te mea caussa defensionem præoccupem, & ante litem mihi iudicem parem: eorum videlicet more, qui de prælio suspicantes, hostis aduentum anteuertunt. Existimo non defuturos qui Commentationum nostrarum in Euclidem, editionem non æquo animo ferant. Ac primùm omnium obiicient, quòd aliorum Demonstrationes nobis sumamus, & vtamur pro nostris. Deinde, opinor, festinationem nostram improbabunt, quòd ne dimidium quidem operis proferamus. Sed prior illa reprehensio, vt confido, non magnum pondus inuidiæ est habitura, apud eos qui æquiori iudicio rem expenderint. Qui enim nos accusabunt, non iam Campanum, sed Theonem ipsum accusent oportet: quorum ille alter nihil ferè habet, quod à Theone non sit mutuatus: hic verò ipse aliorum probationes per manus traditas congessit. Quid enim? an existimamus Propositiones Geometricas ab Euclide in ordinem esse redactas, quæ non antè suis assertionibus confirmata essent? an verò Theorema de laterum Trigoni Rectanguli potentiis tam celebre, à Pythagora Samio relictum fuisse putamus, nisi sua demonstratione munitum? Quid ante eum, Thaletem? quid post eum, Platonem, Hippocratem Chium, Architam Tarentinum, ac totam Geometrarum nationem fecisse putamus? an denique Euclidem Problema illud ab Oraculo propositum de Cubo duplicando, prætermissurum fuisse credemus, si constitisset demonstratio? Immò adeò, idem ipse autor quid aliud ferè ad Geometriam attulit de suo, quàm ordinem? Denique quid est in omni scriptorum genere, quod quisquam sibi vendicare aut propriè suum dicere possit, præter collocationem? Nobis verò quur inuidebitur, si ea nostro nomine emisimus, quæ sic excoluimus, vt aliena dici non possint? quum interim multa protulerimus, quæ non modò non tralatitia sunt, sed noua omninò & hactenus non cogitata. Quæ à Theone & Campano accepimus, meliora effecimus, aut concinnitatis specie, aut compendii dignitate. Demonstrationes enim, nostra sententia, breues & cordatas esse oportet. Quibus rebus quum ad eas meditationes pulcherrimas incenderimus animos studiosorum, inuidiã, siqua in nos orta fuerit, publica approbatione remouebimus. Quod ad alteram offensionis partem attinet, qui nos de properatione arguent, sic habebunt: nos, quum ad scribendum accedimus, cogitare non solere, quàm magnum opus, sed quàm vtilissimus daturi. Planorum argumentum à Solidorum materia seorsùm exhibuimus. quid tum? si, quod peculiarem habet tractationem, separatim tradidimus? Cuius editionis retardationem commodiùs profectò sustinuissem, quàm Geometriæ studiosi. Neque enim mihi homini philosopho tanta honoris & laudis, quanta hominibus ingenuis, scientiæ & doctrinæ cupiditas esse debet. Hos libros velut arrhabonem quendam exhibemus, dum opus integrum extruere pergimus, neque laborem intermittimus. Ac tametsi hi libri priores, totius ædificii speciem ostendunt, & ichnographiam continent: velim tamen à nobis se nihil accepisse Respublica existimet, donec opus absoluerimus, Deo Optimo Max. qui nos ad hoc munus destinauit, approbante. Tu

verò,

verò, Ferneli, ſi factum noſtrum probaueris, magnum nos laborum noſtrorum fructum percepiſſe existimabimus. Sin erit in quo à nobis diſſentias, id etiã in vtilitatem emendationis conuertemus. Scis enim in noſtra ſcribendi profeßione quid nobis ſit exoptandum: ſcilicet, doctos homines nobis ex animo, non, vt in cæteris ſcriptorum generibus fieri ſolet, gratiæ cauſſa ſuffragari. Vale. Lugduni.

IACOBVS PELETARIVS
HIERONYMO CARDANO S.

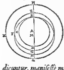
QVVM *neque vbi terrarum eſſes ſatis compertum haberem, neque eſſet cui commodè hanc ad te Epiſtolam darem in hac rerum & temporum perturbatione, eam publicè ad te mittere conſtitui: præſertim quum argumentum ipſum penè eſſet publicum. Illud enim officium literarum, quod priuatim in amicos conferri ſolet, non putabam te à me requirere: propterea quòd ipſa Philoſophiæ commendatio optima animorum conciliatrix, ad conſeruandam beneuolentiam ſatis per ſe habet momenti. Tum publica illa ſcribendi profeßio efficit, vt eos qui longo interuallo diſtracti ſunt, præſentes ſemper habeamus, & cum ipſis, immò cum mortuis familiariter ac ſæpe colloquamur. Atq; in meo dolore, quòd doctißimorum hominum, qui paulò ante vixerunt, conſuetudine aut notitia non ſim potitus, hac ſola conſolatione vtor. Copernici memoriam ſanctißimè colo. Monumentum enim nobis reliquit ſui nominis & ingenij ſempiternum. Gemmæ Friſij mortem, quæ proximè ad nos allata eſt, pro eo ac debui, moleſtè tuli: ad quem etiam ſcribere inſtitueram, & me breui eum viſurum ſperabam. Iam tum anteà Eraſmus Reinoldus, Copernici doctißimus interpres & imitator, deceſſerat. Schonerum, Stifelium: Fracaſtorium, Gauricum, multoſq; noſtræ Matheſeos principes, quos Germania, & Italia item veſtra aluit, nunquam vidi: ea quidem cauſſa, quòd neque ætate æqualis, neque temporis ratione ſatis inſtructus eſſem ad proficiſcendum. Quorum omnium deſiderium, benigna recordatione ſuſtineo, & eorum ſcriptis legendis leuius fero. Te verò Cardane, Lugduni, vnde nunc ad te ſcribo, familiarem diebus multis habui: quum in Scotiam tibi iter eſſet. Quæ notitia mihi charißima & iucundißima fuit. Erat tibi tum inter manus, Librorum tuorum quos de Subtilitate ſcripſeras, recognitio. Atque, vt ad inſtituti mei rationem explicandam ingrediar, memini te mihi locum illum oſtendere, de duabus lineis, quæ quum coitionem affectare videantur, nunquam tamen concurrunt. Ex quo tempore non deſtiti mecum diſpicere, quánam ratione id in Geometria conſtaret. Nam quum firmißimo præiudicio mihi propoſuiſſem, Geometriam eiuſmodi eſſe, quæ ab omni repugnantia & Paralogiſmo, remota eſſe deberet: eam tandem comperi ſuis quidem miraculis non carere, ſed probationis ſubſidium nunquam deſiderari. Demonſtrationem igitur à nobis perueſtigatam, tertio Commentationum noſtrarum libro adſcripſimus. Alterum item de angulo contactus Paralogiſmum à te propoſitum diſſoluimus. In quo vt etiam intelligerent ſtudioſi, nos rationibus noſtris nihil deeſſe voluiſſe,*

tuum

tuum iudicium nobis adhibendum esse duximus : & alteram confirmationem huic loco etiam pleniorem subscripsimus. Atque imprimis hoc nobis est præmittendum,

In Circulis, anguli qui fiunt à Diametro & Peripheria, sunt æquales.

Sint enim super Centro A, *duo Circuli* BCDB *&* EFGE, *quorum Diametri* BD *&* EG. *Et secet* EG *ambos Circulos in punctis* E, B, D, *&* G. *Aio duos angulos* CBD *&* FED *esse æquales. Nam si sit* FED *maior ipso* CBD *(neque enim contrà,* CBD *maior vllo pacto erit ipso* FED*) : ac describantur plures Circuli super eodem Centro* A, *quorum vnus hoc loco satis fuerit* HKLH*: fiet tandem ex continuo augmento, angulus à Diametro & Peripheria, verbi gratia, angulus* KHL, *maior recto : Quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad* B *&* E, *inter se æquales, Quod fuit ostendendum. Idem & de exterioribus iudicium.*



Neque in hac demonstrandi ratione vllus est Paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos Rectilineos : attamen eric angulorum qui fiunt ex sectione rectæ lineæ & Peripheriæ, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui Mixti dicuntur, manifestè maiores & minores fiunt.

His ad hunc modum demonstratis, aio contactum Circulorum interiorem, non esse quantitatem. Super Centro M, *in eadem linea* HL *posito, describatur Circulus* BFNB, *tanto interuallo, quanto est Circulus* EFGE*: posita scilicet* MB *Semidiametro, æquali ipsi* AE *: qui Circulus tangat* BCDB *Circulum in puncto* B. *Et manifestum est, angulum* FBD, *æqualem esse angulo* FED, *propter æqualitatem Peripheriarum & Diametrorum : Quapropter & idem ipse* FBD *erit angulo* CBD *æqualis. Igitur* CBF *contactus, nihil addit ad ipsum* CBD *angulum. Quare* CBF *quantitas non est, Quod fuit probandum. Atq. hinc procedit demonstratio eorum quæ illuc adduximus, Theorematum : quæ hoc loco repetere nihil attinet. Tu verò pro tuo otio omnia examinabis. De quibus quid sentias si mihi aut priuatim aut publicè significaueris, pergratum mihi feceris. Vale.*

IACOBVS PELETARIVS PETRO NONIO S.

NON *dubitabam, Petre Noni, quum nostræ in Euclidem commentationes ad te peruenirent, quin me erga te bene affectum, vel ipso doctrinæ nomine, esses existimaturus. Hæc enim nostra Mathematicarum artium studia eiusmodi sunt, vt eos qui ipsa amplectuntur, mutuo amore deuinciant. Quid enim veritate, quam nos tractamus, candidius? quæ maior ad conciliandos animos vis esse potest, quàm eius quæ animorum*

perpet

perpetuitatem maximè testatur, scientia? Memini ego quum Mathemaicis initiarer (quod quum tarde fecissem, magna etiam intermissione, ob temporum meorum varietatem vsus sum) ac studiorum successione tua scripta euoluerem, me magna spe & alacritate fuisse incensum, vt aliquando pari facultate & iudicio scribere licêret. Librum de Crepusculis abs te diligentissimè scriptum auidissimè legebam: & alterum item illum, quo in nostrum Orontium animaduertis. Qui vtinam tam plausibilem præ se ferret titulum, quàm est Mathematico, id est, vero argumento conscriptus. sed tamen veritate ipsa apud synceros animos nulla res potior debet esse. De me verò quum dico, animum quidem meum tibi testatum facere cupio: sed interim mihi polliceor futurum, vt mihi in amore respondeas, simulatq; tibi innotuero: scilicet, vbi primùm hæ nostra Demonstrationes tibi in manus venerint. Non enim puto te ante hoc tempus de me audiuisse, qui patrio sermone hucusq; ferè scripserim: cuiusmodi & Ars nautica abs te edita in tuorum manibus versatur: & Algebram etiam abs te scriptam audio. Sed has ipsas Demonstrationes sine maiori meæ erga te beneuolentiæ testimonio exire nolui. Ac velim intelligas, me nihil magis optare, quàm te meorum scriptorum censorem mihi dari. Eaq; gratia maturo quantùm possum (neq; properationem affecto tamen) laborum meorum publicationem, ne is mihi pereat fructus, quem ex vestro omnium iudicio, aut etiam castigatione, capere possum. Omninò enim aliter sum affectus, quàm cæteri. Non me pudet doctorum hominum iudicium quocunque meo dispendio experiri: modò id tandem in meum commodum reponere sperem. Quod in me quisque animaduerterit, id in maximo existimationis lucro deputabo. Cuius mihi satius est temporariam iacturam facere, quàm perpetuam. At enim, inquies, quid est quòd temporis beneficio non vteris? quur teipsum in consilium non adhibes, moræ patiētia? Rectè. Sed omnibus hominibus, mi Noni, procliue est vt peccent, etiā in veritatis luce, in qua ipsā affendere, alienum imprimis & inhonestum esse videtur. Emendatio non tam constat tempore, quàm consilio. Consilium verò ipsum ab amico præstatur, & diuturni temporis vice est. In re nostra tam lyncei esse non possumus. Nobis planè prouidentia illa præscribit, vt mutuas operas præstemus. Sed ego longius digredior. Ad me reuertor. Tuum erit, mi Noni, non tantùm amici nomine (quod tibi ingenua amoris professio præscribit) sed etiam veritatis contemplatione (quò te publica vtilitas inuitat) meas lucubrationes, quatenus vacabit, examinare. In quo longè felicior fuissem, si tecum per locorum interuallum, communicare licuisset. Sed quid locorum interuallum mihi prætendo? Immò verò, fato quodam meo neque præceptorem in his studijs, neque socium vnquam habui: ne in Gallia quidem nostra. Meditatione omnia sum assecutus. Qua occasione symbolum illud ex Periandro mihi sumpsi, μελέτη τὸ πᾶν. Quæ verò assequi potui, ea libenter impertio. Idem verò abs te etiam expecto, mihiq; gratissimum erit, si aliquando intellexero tibi amicitiam meam curæ fuisse. Quod tum demùm intelligam, si me de ijs quæ ad existimationem meam & publicam vtilitatem pertinebunt, monueris.

Vale. Lugduni.

✶

IACOB

IACOBVS PELETARIVS PASCHASIO HAMELIO MATHEMATICARVM REGIO PROFESSORI S.

MIRABVNTVR, *opinor, nonnulli, quòd in hac Demonstrationum editione nimis de me ipse diffidere videar: dum eorum ad quos scribo tam studiosè fidem obtestor, & opem imploro. Verùm eo consilio id facio, vt palàm profitear quàm longè absim ab eorum hominum confidentia, qui ambitiosè res suas ostentant, & pari impudentia aliorum inuenta sibi tribuunt. Quanta cura, quanta meditatione scripserim, mihi conscius sum: quid præstiterim, aliorum iudicio relinquo. Equidem in meis lucubrationibus alijs, non ita supplex esse soleo. Sed in hoc Geometriæ spectaculo, nobis modestiæ persona imposita est, non ostentationis. Multorum hominum & seculorum adiumenta huc conferenda sunt. Tibi verò, Paschasi, id muneris præ cæteris incumbit, vt tuam in hac re, quod facis, operam præstes. Eam facultatem tua doctrina, quam assiduo studio singularem comparasti, tibi concedit: opportunitatem abundè suppeditat Regia illa professio: Illud verò in mea caussa officium, nostra etiam amicitia à te postulat. Vale. Lugduni.* M. D. LVII.

IACOBI PELETARII

CENOMANI IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA DEMONSTRATIONVM LIBER PRIMVS.

Principiorum explicatio.

PRINCIPIA, ſunt quorum nulla eſt cauſa. Ipſis enim, quatenus Principia ſunt, nihil eſt prius. Atque ob id in diſciplinis tanquam per ſe nota ponuntur: neque probationem recipiunt, ſed probationum ſunt fundamenta. Horum in Geometria triplex genus: Definitiones, Poſtulata ſeu Petitiones, & animi Notiones. Definitiones quidem naturali inſitaq; intelligentia non ſtatim concipimus: ſed in eas, quum proponuntur, ſponte conſentimus: ſic dictante rei cuiuſq; natura. Quapropter à nonnullis Hypotheſes dictæ ſunt. Petitiones verò, quanuis prima ſpecie non animaduertantur, tamen auditæ facilè conceduntur, ſic dictante ratione. Atque hæ, vt plurimùm, ad Definitiones conſequuntur. Sed animi Notiones in quoſcunque etiam rudiſſimos cadunt. Qui igitur Definitiones & Poſtulata ſubterfugit, is doctrinæ non eſt capax. Nemo enim ad diſceptationem de re aliqua ritè accedit, niſi prius conueniat quid ſit id de quo ſit diſceptandum, atque in id conſentiat quod ex conceſſis pendet. Sed qui Notiones non recipit, etiam ſenſu communi caret: vnde & animi ſenſa vocantur. Cur ergo Definitiones, quæ interim ſubobſcuræ ſunt, Notionibus præponuntur ab Euclide? Nimirum, quia licet Definitiones non adeò claræ ſint: res tamen quæ definiuntur, ſeſe omnium primas obiiciunt: ob idq; primas cognoſcere cupimus, vt appareat Diſciplinæ materia.

Quum igitur in Geometricis animi Notiones, Quantitates reſpiciant: ideò Quantitates earumq; ſpecies definiſſe oportuit, vt eſſet in quo notionē animi exerceremus. Horum itaque ordo ſic habet.

★

DEFINITIONES.

1 PVnctum, est quod partes non habet.

Geometria Magnitudines considerat, easq́; finitas. Sed quia Magnitudinum partes, naturam totius denominationemq́; retinent, partes enim Linearum, lineæ sunt: Superficierum, superficies: & Corporum, corpora: alioqui vaga & confusa esset rerum substantia: Geometria vbique infinitum deuitans (infiniti enim nulla est scientia) ab eo initium sumit, quo simplicius cogitari nihil possit: id verò Punctum vocamus. Nam quum in rebus externis aliquid sensui obiiceretur minimum: sanè rationabile fuit, intellectui quoque aliquid dari quo nihil esset minus. Punctum igitur in Geometria, propemodùm est quod in Arithmeticis Vnitas. Nam sicut Vnitas est Numerorum veluti supposita materia & origo, quæ Numerus non est: ita Punctum, Magnitudinis, quum magnitudo non sit. Illud autem habet mirabile, quòd quum diuisionem non admittat, est tamen cùm in rebus omnibus, tum in Geometria maximè momentaneum: Nihil enim ferè in vniuersa rerum conquisitione aliud spectamus quàm Punctum. Circuli centrum omnium primum quærimus: Quantitates Punctis terminamus, metimur, & diuidimus: vt Punctum assequi, nihil aliud sit quàm scopum attingere.

Plato Punctorum hypostasin seu subsistentiam vocat adamantinam: nempe æternam, stabilem, incorruptibilem, quæq́; eodem semper modo habeat: Vniuersum circa ipsa conuerti, ac circunquaque in plausum moueri. Eæ sunt Epicuri Atomi, omnium rerum semina.

Ab negatione autem definit Euclides Punctum, quòd ad simplicissimum deuenire non possimus, nisi siquid intelligamus quod magnum non sit: quippe neque longum, neque latum, neque crassum.

Punctum autem nonnulli à Signo sic distinguunt, vt Punctum dicant esse quod in medio est Figuræ: Signum verò, quod in termino, aut alibi quàm in medio. Sed nos hac curiositate contempta, vtrunque sine discrimine vnum & idem esse ponimus. Ex Puncti fluxu perpetuo in longum, gigni intelligitur Linea: Quæ sic definitur,

2 Linea, est longitudo latitudinis expers.

Magnitudinum prima est Linea: cui ex iis tribus quæ Puncto negãtur, vnum inest: nempe longum. Hic enim sub latitudine crassicies auditur: quum crassum sine latitudine non sit.

Non igitur sicut ex accumulatis Vnitatibus fit Numerus, sic ex additis Punctis fit Linea: sed ex ipsorum fluxu continuo. Atque in hoc differt Continuum à Discreto, quòd Continuum infinitè diuidatur: neque ad Punctum vnquam deueniatur, vt in Discretis ad Vnitatem.

3 Lineæ autem limites, sunt puncta.

A Puncto Linea oritur, & in idem desinit. Sed hoc loco dubitatur quonam modo Puncta Lineæ sint limites, quum Circuli peripheria nullos terminos videatur habere. Sanè Puncta eius Lineæ limites dicuntur esse, quæ terminata est. Peripheriam verò, quatenus extrema non habet, Puncta non terminant. Extrema autem si ponuntur, ea nisi Punctis designari non possunt: aut saltem puncto vno, quod duorum vicem supplebit.

4 Linea Recta, est quæ ex æquali sua interiacet puncta.

Hæc generalis est definitio Lineæ rectæ: quæ etiam Lineæ ambienti, hoc est, quæ

Circulum claudit, tribui potest. Hanc enim Plato rectam quoque esse voluit: reliquas vero ex his duabus mixtas, obliquas vocauit. Quod nos ad decimamquintam Propositionem Libri Tertij probabilius ostendemus. Circulo enim nihil æqualius neque concinnius. Vbique tamen Euclides Rectum à Rotundo seu Peripheria distinguit: quod & nos obseruabimus, disciplinæ caussa.

Igitur Linea Recta, est à puncto ad punctum via breuissima: seu, vt Archimedes, minima linearum quæ eosdem habent limites. Vt à puncto A ad punctum C, ducitur vnica linea recta A B C. Sed peripheriæ, quales A D C & A E C, infinitæ duci possunt.



Ac quemadmodum ex Puncti fluxu in continuum, exit Linea: ita ex Lineæ in transuersum ductu, oritur Superficies: Quæ sic definitur.

5 Superficies, est quæ longitudinem & latitudinem tantùm habet.

Superficiei vnum ex tribus abnegatur quæ Solido insunt, nempe crassum seu profundum. Hanc quidam definierunt terminum esse Corporis.

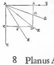
Ac tametsi, Punctum, Linea, & Superficies intellectu tantùm capi videantur, non re existere, neque ostendi posse: habet tamen vnumquodque horum in rerum natura quo repræsentetur. Puncta enim corpusculis insecabilibus assimilantur, quæ in radijs Solis colludunt: Lineæ radijs ipsis: Superficies vmbris, vt quæ terram nunquam subeant: seu etiam coloribus, ex Pythagoreorum sententia. Puncta igitur, atomi sunt: Lineæ materia: Superficies forma. Atque ex his Corpus, quod longum, latum, & crassum est.

6 Superficiei extrema, sunt Lineæ.

Hoc loco dubium mouetur simile quod & in terminis ipsius Lineæ: qur Lineas Superficiei extrema esse dicat Euclides. Nam superficiei Sphæricæ vnica linea termi nus est. Verùm qui superiorem explicationem acceperit, is etiam in hac facilè conquiescet. Superficies enim rotunda quomodocunque diuidatur: (ea autem diuisio fit officio Diametri, aut lineæ cuiusuis abscindentis) ipsius limites erunt Lineæ. Eadem erit & terminorum Corporis, quæ Supetficies sunt, ratio.

7 Plana Superficies, est quæ ex æquali suas interiacet lineas.

Conuenit hæc Planæ Superficiei Definitio cum Rectæ Lineæ definitione. Quum itaq; recta linea Superficiei ex æquo incumbit, nempe quum omni variè accommodatur loco, ea est Superficies Plana. Vt, si in Superficie A B C D, linea A E super puncto A fixo sic circunducta fuerit per puncta C, F, D, G, vt ipsi Superficiei æqualiter incumbat, eamq; sic radat, vt punctum nullum emineat, donec ipsa peruenerit ad A B lineam.



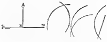
A plana igitur Superficie sic excluditur sphærica, seu rotunda, vt à recta linea excluditur Peripheria.

8 Planus Angulus, est duarum linearum in plano sese tangentium alterius ad alteram inclinatio.

Hæc Anguli definitio antiquorum est, peruulgata: quam nos ad Decimâquintam Propositionem Tertij apertiùs declarabimus. Habet enim sensum tolerabilem & perspicuum, donec illuc ventum erit. Nos interim tamen Angulum Planum simpliciter sic definimus,

Angulus Planus, est duarum linearum in plano sectio.
Cessante enim sectione, cessat Angulus: vt illic probabimus.

9 Quando autem quæ angulum continēt rectæ fuerint lineæ: Rectilineus Angulus vocatur.



Vt, si recta A B secet rectam C D: fiunt anguli A B C & A B D, Rectilinei. Cæteri autem Curuilinei quidem dicũtur, quum à duabus curuis fiunt: Mixti verò, quum à recta & curua.

10 Quum recta linea super rectam consistens lineam angulos utrinque æquales fecerit: rectus est vterque angulorum. Et quæ sic cadit linea, perpendicularis est ei super quam steterit.

Angulus Rectus à quibusdam definitur esse, qui sibi adiacentem angulum ab eadem linea factum, æqualem habet. Nos verò, vt etiam Quaternarium honoremus, Angulum Rectum esse dicemus, quartam partem sectionis duarum linearum rectarum. Quum igitur linea lineam secans in neutram partem inclinatur, fit angulus Rectus.

11 Obtusus angulus, est Recto maior:
12 Acutus verò Recto minor.

In centro Circuli à quo semidiametri exeunt, tres Angulorum Rectilineorum species expressæ sunt & conspicuæ. In Circulo enim A B C D, cuius centrum E, duæ semidiametri E C & E D in continuum ductæ, vnicam lineam C D Diametrum efficiunt: super quam stans semidiameter E A, diuidensq́, Semicirculum C A D & totam C D Diametrum per æqualia, facit duos angulos A E C & A E D æquales: atque ob id rectos. Sed B E in eandem C D cadens, & Semicirculum inæqualiter secans, facit angulum B E D obtusum, vtpote recto maiorem, maioriq́, peripheria comprehensum: Angulos autem A E B & B E C, acutos: quia recto minores, & sub minori ambitu contentos.



Neque quisquam miretur, quòd huc Circulum inducamus ante Circuli definitionem. Est enim Circulus Figurarum prima & vltima: omnia probans, & ad omnes ostensiones accommoda: vt nos in Demonstrationibus sparsim dicemus. Sed & ipse Angulorum præcipuus index: Nam ex peripheriæ portionibus, illorum quantitas sumitur, vt modo exhibuimus.

Ex hac igitur Recti & non recti positione, status conditioq́, rerum conspicitur. Vnica est enim Recti constitutio: Obtusi & Acuti, infinitæ. Scilicet rectè faciendi vnica est ratio, & ad verum via vna: in diuersum, innumerabiles.

QVAESITVM est à nonnullis, esset'ne Angulus quantitas an qualitas. Nam Angulum, vt æqualis aut inæqualis dicitur, quantitatem esse volunt: vt autem rectus, obtusus, aut acutus est, qualitatem. Ego verò omnino Angulum vt quantitatem attendi debere puto. Nam etiam quatenus rectus, obtusus, aut acutus est, ipsius sola dimensio consideratur: quod & trium specierum definitiones declarant, quæ ab ęquali, maiori aut minori petuntur. Extra hæc, sese exerceant in Prædicamenti conquisitione, qui volent. Hûc enim Dialectica & Physica non pertinent.

AT LONGE' maior difficultas est in ipsius Anguli forma & constitutione, cuiusm

iusmodi sit & in quo consistat. Nam quòd nonnulli dixerunt, Angulum partem esse Superficiei : id probabile non est. Nam sic ex Angulo Triangulum fieret, ducta tertia linea : quod minimè conuenit. Alij in Puncto, & in Linea, & in Superficie simul esse volunt. Sed hoc rursus maiorem disquisitionem parit. Quota enim ipsius pars in Puncto erit? quota in Linea? quota denique in Superficie? At si hoc quoque abest à veritate, quis erit Anguli situs? Nam si in Puncto tantùm consistere dicatur: aut erunt omnes Anguli æquales, aut Punctorum inæqualitas erit ponenda : quorum illud apertè repugnat veritati, hoc rationi minimè consentire videtur. Nihilo magis in Linea aut Superficie sola esse dicetur.

Huic igitur dubitationi, meo iudicio, sic occurrendum. Angulum quidem in vno puncto consistere : sed inclinationem esse quæ maiorem ipsum aut minorem efficit. Linea quidem lineam secans Angulum constituit : sed non propterea Angulus pars est Lineæ: sicut nec Lineæ ipsæ sunt Superficiei partes, quãuis sine Lineis Superficies esse non possit quæ ipsam terminẽt. Neque igitur Angulus pars erit Superficiei, quòd ipsam occludat. In quo sanè intueri licet, punctum ipsum sectionis, à linea secante premi & quodammodo angustius fieri, pro inclinationis modo. Punctum ergo erit quantitas? minimè. Intellectus enim quod semel minutissimum receperit, id ampliùs non diuidit: sed contrahere tamen & constringere nihil vetat. Ac nequis nos repugnantia dicere putet, is attendat in Geometria Punctum non considerari vt nihil: immò vt aliquid. Et vt in Arithmeticis Vnitatem minuimus, sic & Punctum suo modo in Continuis : scilicet vt id ex quo omnia emergunt, omnium etiam repræsentationem imaginemq; exhibeat: nempe recti, obliqui, longi, lati, & profundi. Quum igitur Geometria Naturam vbique referat, vt est ipsius speculum : cogitemus, sicut in angulo physico duæ lineæ quantumlibet tenues se mutuò non possunt scindere, nisi altera alteri cedat in puncto decussationis: ita in linearum Mathematicarum sectione recta, Punctum quodammodo esse quadratum : in obtusa, hebetius : in acuta, pressius & angustius. Atque hæc intellectus assequitur : qui nisi cum natura nunquam conquiescit. Vnde Puncti imminuendi finem non facit: donec linea cadens cum iacente vna facta sit. Quum itaque Punctum diuisionis expers esse intellectus ponit: id concipit, vt neque Linea, neque Superficies, neque Corpus sit. Sed quum ad Angulum deuenit, qui aliam omninò habet cõsiderationem à cæteris quantitatibus; tunc quod sine partibus receperat, id iam minuendum assumit : scilicet, vt, quod paulò antè diximus, id ex quo quantitas nascitur, naturam etiam quantitatis sapiat. Atque hæc nostra est de Anguli constitutione sententia. Diu enim nos exercuit hęc Puncti variatio: quam à nemine obseruatam inuenimus: & si modò obseruata sit, hactenus dissimulata est. Impedita enim res est in disciplinis ea, quæ quum apparet, demonstrationem non recipit. Quòd siquis hac in re habebit quod probabilius sentiat, huic libenter concedemus. Nihil enim inuestigandum nobis proponimus præter veritatem.

13 Terminus, est quod cuiusque finis est.

Quia Puncta, Linearum : Lineæ, Superficierum : Superficies, Corporum sunt termini : moxq; Figuram terminatam esse ponit. quid Terminus esset definire voluit: nempè vniuscuiusque rei finis.

14 Figura, est quæ sub aliquo vel aliquibus terminis continetur.

Circulus vno termino, nempè vna linea continetur, vt mox dicemus: sicut & Corpus sphæricum vnica superficie. Reliquæ autem figuræ, pluribus terminis : vt Triangulum, Quadrilaterum, ac deinceps planæ Figuræ : Prisma item, Cubus, Columna, Pyramis, & quæ sunt reliquæ solidarum.

SED VIDEBITVR fortassè cuipiam Euclides aliter hìc sentire quàm suprà

ſenſerit in Superficie. Eã enim dixit lineis, nõ vnica linea terminari. Verùm alter conſideratur Circulus, vt Circulus eſt: & alter vt Superficies. Si enim diuidatur Circulus: ipſius pars nulla Circulus erit: Superficiei verò partes, Superficies ſunt. Huius itaque Definitionis ſenſum ſic collige: vt Circulus, quatenus forma rotunda eſt, vnica linea contineri poſſit: ſed quatenus Superficies, pluribus: vt illîc docuimus.

Vel omnino rectius intelligemus Superficiem linea vel lineis terminari.

15 Circulus, eſt Figura plana, vna linea contenta quæ Peripheria appellatur: ad quam ab vno puncto introrsùm exiſtente omnes porrectæ lineæ ſunt æquales.

16. Punctum autem illud, Centrum Circuli vocatur.

Hæc Circuli definitio notiſſima eſt: quæ ipſius affectionem, ſeu, vt dicunt, paſſionem explicat. Siquis verò factionem ſeu creationem Circuli ſibi exponi petat, inſtar Definitionis Sphæræ quam Euclides libro vndecimo daturus eſt: ea erit huiuſmodi.

Circulus, eſt veſtigium lineæ rectæ in plano circunductæ, altero extremorum manente fixo, donec ipſa vnde duci cœpit, redierit.

Vt, ſi linea A B ſuper A puncto duci incipiat in orbem à puncto B, per C, D, & E puncta, donec ipſa rurſus A B facta ſit: deſcriptus erit Circulus B C D E. Atque ex hac deſcriptione, graphicè exprimitur tota Circuli proprietas. Punctum enim illud fixum A, Centrum dicetur: veſtigium verò à puncto B mobili circunſcriptum, Peripheria. Tota demùm linea A B circunducta, Superficiem deſcribit quæ Circulus dicitur. Vnde manifeſtum eſt omnes lineas à centro Circuli exeuntes, æquales eſſe: quum ſint ex vnius lineæ veſtigio.



NEQVE EST quòd quiſquam ſe fanget inquirendo, vtrum ſit prius Rectum an Rotundum. Sed ſi quis ſententiam ferre cogatur: vt Philoſophus, recte iudicabit, ſi vtrunq, ſimul eſſe pronuntiauerit. Nam & Circulus in plano rotatus, Rectum procreat. Menti quippè nihil prius neque poſterius. Immò puncta ante lineas: aut lineas ante Superficies: aut denique ſuperficies ante corpora fuiſſe, vix cogitatio ipſa complecti poteſt. Sicut apud Philoſophos, Vniuerſum aliquando non fuiſſe, captum animorum excedit: ſemper fuiſſe, ſupra omnem admirationem eſt. Nos autem, quantum cogitatione aſſequimur, omnia ſuo ordine ſtatuere, atq, ad artem reducere: conamur iudicio quoad eius fieri poteſt, probabili, minimeq́, fallaci. Ordo enim in Diſciplinis dux certiſſimus. Sed nos hæc rerum varietas exercet: in qua ſatis nobis eſt coniecturam ad vſum accommodare. Quid enim nos efficere poſſe putamus arte, in iis quæ Natura tam affabrè fecit? aut quid ingenio conſequi, quum de his quæ diuinitùs emanarũt, humanitùs iudicamus. Circulus igitur ex ſe ipſe ortus, ex Recto prouenire videtur: infinitus, ac finito ſimilis: omnia continens, vt capaciſſimus, & tamen aliquid extrà ſe in ſpeciem admittens. Sed nos in hanc rem aliâs vberiùs, Deo iuuante, philoſophabimur.

17 Diameter Circuli, eſt linea recta per centrum acta, quæ vtrinque ad peripheriam terminata Circulum bifariam diuidit.

Quum linea A B in figura modò inducta, peruenit ad punctum D oppoſitum: fit vna linea B A D: quæ Diameter eſt Circuli, ipſumq́, bipartitò diuidit. Quod Thales Mileſius, qui Geometriam ab Ægypto in Græciam aduexit, primus animaduer-

rit

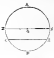
tit & probauit. Nam si linea per centrum acta, Circulum non diuidat bifariam; non erunt à centro ad ambitum extensæ lineæ, æquales.

Cæterùm Diameter, & Dimetiens Circuli & Quadrati dicitur: immo & Diameter Quadrilaterorum, nulla vocum curiositate: quamuis horum proprius sit Diagonius. Axis autem, Sphæræ & solidorum est: vt Coni, Cylindri, & Piramidis.

18 Semicirculus, est figura quæ sub Dimetiente & ea quæ à toto sublata est peripheria, continetur.

19 Sectio Circuli, est quæ sub recta linea & Circuli peripheria maiore aut minore Semicirculo, continetur.

In Circulo A B C D E, vtrauis Figurarum B A F & B D F, ex linea recta B F per centrum acta, & linea curua, quam subtendit, conflata, Semicirculus dicitur. Sed ex linea C E per centrum non transeunte, & peripheriam diuidente, fiunt duæ Figuræ inæquales: C A E, maior Semicirculo, & C D E, eodem minor: Atq; harum vtralibet, Sectio Circuli dicitur. Vtraque etiam peripheriarum C A E & C D F, Arcus: recta autem C E, Chorda vulgò appellatur.



Hæ tamen duæ Definitiones hûc non spectabant, sed ad tertium librum: nisi fortè Principia omnia, vniuerso operi communiter præscribenda dicamus: quæ tamen maluit Euclides in singulos libros distribuere: Atque ob id, hanc posteriorem in tertio libro repetit. Post Circulum, Figuræ Rectilineæ definiuntur.

20 Rectilineæ Figuræ, sunt quæ sub rectis lineis continentur.

21 Trilateræ, sunt quæ sub tribus rectis continentur lineis.

Figurarum Rectilinearum prima est Trilatera. Ex ipsius enim Rectæ lineæ definitione, non possunt duæ lineæ rectæ superficiem constituere: vnde neque figuram. Nam à puncto in punctum vnicus est ductus in rectum. Secunda verò in ordine est Quadrilatera.

22 Quadrilateræ, sunt quæ sub quatuor rectis lineis comprehenduntur.

Quadrilateræ ad demonstrationes Geometricas accommodantur, sicut & Trilateræ, propter simplicitatem: ob idq; inter Principia definiuntur. Quæ verò quaternarium excedunt, obscuriorem habent tractationem.

23 Multilateræ sunt quæ sub pluribus quàm quatuor rectis lineis comprehenduntur.

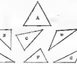
Rectilinearum Figurarum multitudo infinita est: quæ à numero laterum nomen habent. Sed generali vocabulo Multilateræ dicuntur.

24 Inter Trilateras porrò Figuras, Aequilaterũ Triangulum, est quod tria habet latera æqualia.

25 Isosceles autem, quod duobus lateribus æqualibus & tertio inæquali constat.

26 Scalenum verò, eſt quod ſub tribus inæqualibus lateribus continetur.

His tribus poſtremis Definitionibus, tres Triangulorum ſpecies exponuntur. Harum prima, eſt Æquilatera. Nam quæ omni ex parte æqualitas eſt, ſimplicior, & cognitu facilior. Huic proxima eſt duorum laterum æqualitas, quæ baſi inæquali ſubtenduntur. Atque hoc Triangulum Iſoſceles vocatur. Tertia ſpecies eſt, quæ vnum tantùm æquale habet: hoc eſt, tria inæqualia. Æquilaterorum vna eſt conſtructio: in ipſis enim perpetuò ſunt anguli æquales. Sed in Iſoſcelibus & Scalenis, anguli infinitis modis variantur.



Æquilaterum eſt A. Iſoſcelia ſunt B, C, & D. Scalena E, F, & G Triangula.

27 Ampliùs, Trilaterarum Figurarum Rectangulum Triangulum, eſt quod vnum rectum habet angulum.

28 Amblygonium, cuius obtuſus eſt vnus angulorum.

29 Oxygonium, quod tribus conſtat acutis.

Rectangula ſunt, B Iſoſceles, & E Scalenum: Amblygonia ſeu Obtuſangula ſunt, D Iſoſceles, & G Scalenum: Oxygonia ſeu Acutangula ſunt, A Æquilaterum, C Iſoſceles, & F Scalenum. Æquilaterum perpetuò Oxygonium eſt. Reliquæ ſpecies Rectangulæ, Amblygoniæ, & Oxygoniæ eſſe poſſunt.

Poſt Trilateras ſequitur Quadrilaterorum diuiſio vniuerſa: quarum perfectiſſima eſt Quadrata.

30 Quadrilaterarum autem figurarum, Quadratum, eſt quod æquilaterum & rectangulum eſt.

31 Altera parte longius, eſt quod rectangulum quidem eſt, ſed non æquilaterum.

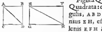
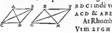


Figura Quadrilatera A B C D, cuius Diameter A D, eſt Quadrata: conſtatq́, duobus Triãgulis Iſoſcelibus rectangulis, A B D & A C D. At Figura E F G H, cuius Diagonius E H, eſt altera parte longior: conſtatq́; duobus Scalenis E F H & E G H, Rectangulis.

32 Rhombus, eſt figura quadrilatera æquilatera, ſed non rectangula.

33 Rhomboides verò, eſt quæ ex oppoſito bina latera æqualia, binosq́; angulos æquales habet: ſed neque æquilatera, neque æquiangula eſt.

Rhombus, quatuor habet latera æqualia, duasq́, Diametros inæquales: vt Quadrilaterum A B C D: atque hinc duos angulos æquales oppoſitos, obtuſos: vt B A C & B D C: indè vero duos oppoſitos æquales, acutos: ut A C D & A B D.



At Rhomboides habet bina latera oppoſita æqualia. Vt in E F G H Figura, duo latera E F & G H oppoſita,

inter

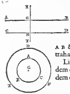
inter se sunt æqualia, duoq; E G & F H inter se. Cæterum in hoc conuenit cum Rhombo, quòd duas Diametros inæquales: binos item angulos oppositos æquales, hinc obtusos, illinc acutos habet.

34 Præter hæc autem reliqua Quadrilatera, Trapezia dicantur.



In his nulla est laterum definita æqualitas: sed promiscua constitutio: propter quod anormia sunt. Vt duo A & B Quadrilatera.

35 Paralleli, seu æquidistantes lineæ rectæ, sunt quæ in eodem plano existentes, in vtranque partem productæ neutrobi conueniunt.



Quum Recta linea, rectas lineas secans, ipsis æqualiter superstat, aut in easdem æqualiter inclinatur, vt quum anguli sectionum fuerint mutuò æquales: hæ lineæ sectæ, sunt Paralleli, seu Æquidistantes.

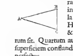
Vt si duas lineas A B & C D secet linea E F in punctis G & H: fueritq; angulus A G E æqualis angulo C H G, duæ A B & C D lineæ, erunt patalleli: quia in vtranuis partem protrahantur, nunquam concurrent.

Lineæ autem Circulorum, Paralleli dicuntur, quæ super eodem centro ductæ sunt. Vt duæ lineæ A B C & D E F super eodem centro G, æquidistant inter se.

PETITIONES.

1 Ab omni puncto in omne punctum rectam lineam ducere.

Duo puncta, vbicunque assignentur, in eodem plano esse intelliguntur: atque ob id, ab vno ad alterum via est aliqua breuissima. Quapropter à puncto A ad punctum B nemo negauerit lineam rectam duci posse. sic neque ab A ad C. Et quia eadem



ratione B & C in eodem sunt plano: fit vt tria quælibet puncta in eodem semper existant plano. Ex quibus superficies Triangula conflabitur: qualis est A B C. Atque hæc est rerum colligatio. Hic enim binarius ternarium: ternarius quaternarium, immò & senarium includit: quum vnunquodque punctorum vice duorum sit. Quartum autem punctum erit septimum & aduentitium. Atque ideò ad superficiem conflandam, quarto puncto non est opus, quòd Senarius sit numerus perfectus.

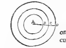
2 Rectam lineam terminatam in continuũ rectumq; producere.

Inter Quantitates non datur tam magna, quin maior dari possit: neque tam parua, quin minor. Rectam itaq, A B ad punctum C produci



posse nemo nisi indocilis inficiabitur.

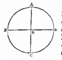
3 Omni



3 Omni centro & interuallo Circulum describere.

Superficies plana in ambitum extendi infinitè potest: sicut ab omni puncto in omne punctum recta linea duci. quò fit vt Circulus omni interuallo describi posse concedatur.

4 Omnes angulos rectos inter se æquales esse.



Hæc constat ex decima Definitione. Rectus enim angulus, fit quum recta linea in rectam lineam ad prependiculum cadit: hoc est, æqualiter ipsi superstat. Id verò ex Circuli centro euidentissimè apparet. Vt ex A B C D, qui duabus Diametris se in E centro secantibus diuiditur in quadrantes, qui quatuor angulos qui ad E, subtendunt æquales, quia rectos.

5 Quum in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores & in eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit: rectas lineas productas tandem concurrere ad eam partem in qua anguli duobus rectis minores existunt.

Vt si in rectas lineas A B & C D, recta incidens E F, & secans ipsas in punctis G & H, duos angulos interiores B G H & D H G simul sumptos, fecerit duobus rectis minores: ipsæ rectæ lineæ A B & C D concurrent versùs duo puncta B & D. Si enim ponatur B G perpendicularis ipsi E F: Scilicet anguli qui ad G, recti: sit autem D H G minor recto: erit D H inclinata super E F versùs E: Atque ob id, angulus D H G minor angulo D H F, ex conuersione Decimæ Definitionis: sicq; minor recto: quoniam si esset æqualis, vterque esset rectus, per eandem Definitionem cuius contrarium hîc ponimus. Igitur ob inclinationem, ipsa C D producta tandem conueniet cum A B: idq; ob eam causam, quòd duo anguli B G H & D H G, duobus rectis sunt minores.



Hoc tamen Postulatum inter Definitiones reponi poterat. Exponit enim lineas non parallelos, sicut decima Definitio Parallelos. Ad hæc, quum in speciem Theorematis enuntiaretur: nos in Postulatum redegimus.

ANIMI NOTIONES.

1 Quæ eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia.

2 Et si æqualibus æqualia addantur, tota erunt æqualia.

3 Et si ab æqualibus æqualia auferantur: quæ relinquuntur erunt æqualia.

4 Et si inæqualibus æqualia adiiciantur: tota erunt inæqualia.

5 Et si ab inæqualibus æqualia auferantur: reliqua erũt inæqualia.

6 Quæ

6 Quæ eiuſdem duplicia ſunt, inter ſe ſunt æqualia.
7 Et quæ eiuſdem ſunt dimidium, inter ſe ſunt æqualia.
8 Quæ inter ſe ipſa conueniunt,& inter ſe ſunt æqualia.
9 Totum eſt ſua parte maius.
10 Duæ rectæ lineæ Superficiem non concludunt.

Hæc verò Axiomata per ſe ſic manifeſta ſunt, vt nulla oſtenſione indigeant. Horum tamen vltimum quidam in ordine Poſtulatorum poſuerunt: neque omninò abſque ratione. Nam & Poſtulati naturam ſapit: & ad definitionem Rectæ Lineæ conſequitur, vt iam antè monuimus. Sed in hoc non inſiſtemus. Vtrobique enim Principij notiſſimi vim habet.

De Hypothesi, Demonstratione, Problemate, & Theoremate.

*

HYpothesis, quantùm huc attinet, est subiectio, seu fundamentum ratiocinationis. Hanc re existere non est necessarium: probabilem esse satis est: eamq́, legem duntaxat habet, ne quid absurdi importet. Vt quum conuenerit Figuram Figuræ esse æqualem, aut maiorem, atque ex hoc deducatur argumentatio: ea æqualitas aut inæqualitas, Hypothesis est: A qua discedere, constante argumentatione, non licet. Demonstrationem verò appellant Dialectici, Syllogismum qui faciat scire: nempè qui ex probatissimis concludat. Atque hæc à Geometria ortum habet. Immò omnis quæ ad verùm perducit probatio, Geometrica est. Vt verissimè dictum sit, neminem scire verum à falso distinguere, cui Euclides non fuerit familiaris. Quòd siquis attentius sciscitabitur, qur in Demonstrandis Propositionibus non eluceat forma Syllogismi, sed tantum concisa quædam membra Syllogismorum appareant: is sic habeat, præter dignitatem esse, quæ in scholis docentur, ea quum in rem præsentem ventum sit, ex præscriptis formulis obseruare. Neque enim Orator, quum ad sotum accedit, quæ à Rhetore excepit dictata, in digitis collocat: immò id agit, vt quum præceptorum maximè meminit, nihil minus quàm Rhetoricen cogitare videatur. Sic in opere Geometrico, quum nil aliud spectemus quàm vt scopum exquisitè assequamur: Syllogismi figuram omninò dissimulamus. Quæ tamen si exigatur, è probationibus Geometricis ad viuum exprimitur. Sed nos ea resecamus, quæ repetita non modò tædium, sed etiam obscuritatem parerent. Quod inter Demonstrationes facilè perspicient qui iudicio præditi erunt. Demonstrationum autem conclusiones, sunt Problemata & Theoremata.

Problemata, ortus Figurarum comprehendunt, sectiones, additamenta: eaq́, omnia in arte, quæ facienda proponuntur. Atque, vt in Philosophia, Problemata dicuntur dubia quædam quæ nobis examinanda & soluenda proponimus: sic in Geometricis, Problemata vocamus constructiones ex arte depromptas: à quibus speculationes oriuntur, seu Theoremata: nempè quæ factas Figuras comitantur, proprietates & affectiones: quæq́, scientiæ ipsi inhærent & ipsam efficiunt. Nam in assertione consistunt præceptorum sicut Problemata in constitutione Figurarum. Ad summam, Problemata materiam quandam praxinq́, artis referunt: Theoremata, formam, scientiæq́, meditationem. Ex vtrisque Euclides Elementa Geometrica contexuit, vt operi vicissim subseruiebant, ordine quidem concinniori quàm ante illum quisquam: licet neque Archimedes, neque Ptolemæus, neque vllus antiquorum se ordini astrinxerit: nimirum quòd institutiones Geometricæ tam integræ dari vix possint, quin aliquid desiderari, aut superesse, aut conuenientiorem collocationem exigere videatur. Geometria enim perpetuam meditationis materiam alit. Sed hæc in aliud tempus reponimus. Nunc Euclidem ex professo ducem sequemur.

PROBLEMA PRIMVM,

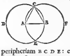
PROPOSITIO PRIMA.

SVper data recta linea, Triangulum æquilaterum constituere.

Triangulum, aut aliam quanuis Figuram super data linea constituere, est ex ipsa linea vnum latus Figuræ facere.

Sit data linea, A B. Volo super A B constituere Triangulum æquilaterum.

Centro quidem A, spatio verò A B, describo Circulum B C D E, per tertiam Petitionem: Rursusq; centro B, & eodem spatio B A, describo alterum Circulum A E F C. Atque hi duo Circuli se mutuò secabunt in duobus punctis,



vt in E & C: quum vtriusque communis sit Semidiameter A B. A duobus igitur terminis A & B, ad alteram intersectionum, vt ad C, duco A C & B C lineas, per primam Petitionem. Dico iam A B C Triangulum super A B linea constitutum, esse æquilaterum.

Quoniam enim A B & A C exeunt à centro A ad peripheriam B C D E: erit per Centri & Circuli definitionem, A C ipsi A B æqualis. Rursus, quoniam B A & B C exeunt à centro B ad peripheriam A E F C: erit, per eandem Definitionem, B C eidem B A æqualis. Duæ igitur A C & B C vni A B sunt æquales: ob idq;, per primam animi Notionem, tres A B, A C, & B C inter se sunt æquales. Quare A B C Triangulum super A B linea constitutum, est æquilaterum, Quod faciendum fuit.

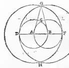
PVLCHRE' Euclides primam ac simplicissimam Figurarum cum vltima & capacissima coniunxit: scilicet Triangulum cum Circulo. Vtriusq; enim vsus immensus: Trianguli, ob simplicitatem: Circuli ob perfectionem. Æquilateri verò duntaxat meminit, quòd hæc Trianguli species eadem semper sit & vniusmodi, ob laterum & angulorum æqualitatem: Reliquas duas species prætermisit, Isosceles & Scalenum. Infinitæ enim eorum figuræ.

Id vnum tamen non omittam, Trianguli Isoscelis longè maximum esse vsum. Nam quum in Geometricis omnia ferè æqualitate & recto probentur, duorum autem æqualitas satis sit ad tertium quippiam demonstrandum: quæcunque Demonstrationes fiunt Trianguli Æquilateri adminiculo, eæ quoq; per Isosceles absoluuntur: Isosceli verò rectus angulus inesse potest, Æquilatero nunquam. Quumq; Triangula nil aliud sint quàm dimidiæ partes Quadrilaterorum: Isosceles, dimidium erit Quadrati, Æquilaterum verò minimè, sed solius Rhombi. Æquilaterum quidem hoc habet priuilegij, quòd tres ipsius anguli perpetuò sint æquales: Isoscelis nunquam, sed duo tantùm. Tres item anguli cuiuslibet Æquilateri, tribus semper alterius Æquilateri singulatim æquales, quanuis singula vnius latera, singulis alterius lateribus sint inæqualia. Sed hæc ad demonstrationes parùm conferunt. Præcipuus igitur Æquilateri vsus, est in solidis: sed in superficiebus fere nullus, nisi fortè ad Figuras Circulo inscribendas, vbi etiamnum vt Isosceles consideratur. Hac nos ratione inducti, Appendicem Campani nõ omisimus, quatenus Isosceles Triangulum super data linea collocandum proponit. Scaleni verò positionem, vt inutilem neglexímus.

Super data recta linea, Triangulum Isosceles constituere.

Manente eadem Æquilateri descriptione, protrahatur linea A B data, donec vtrinque pertingat peripherias Circulorum in punctis D & F. Tum centro A, spa-

tio verò A F, describatur Circulus F G H: rursusq; centro B, spatio verò B D, describatur alter Circulus D G K: quorum vterque alterum secabit in duobus punctis, vt in G & H. non secus quàm in superiori descriptione. A punctis itaque A & G duco lineas A G & B G. Dico Triangulum A B G super A B linea constitutum, esse Isosceles.

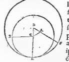


Quum enim A B & A D lineæ sint æquales, nempè vtraque à centro ad peripheriam: eademq; ratione, B A & B F æquales: erunt duæ A D & B F inter se æquales, per primam animi Notionem. Quapropter, addita communi A B, erunt per secundam Notionem, A F & B D æquales. Sed A G ipsi A F æqualis, vtraque enim à centro ad peripheriam: quapropter & eadem A G ipsi B D æqualis. Atqui B G ipsi B D est æqualis, ex ipsa Centri & Circuli definitione. Duæ igitur A G & B G vni B D sunt æquales: ob idq; inter se æquales, per primam animi Notionem. Quare, quum vtraque maior sit quàm A B (maior enim est B D quàm A B): erit Triangulum A B G Isosceles, Quod erat faciendum.

PROBLEMA 2, PROPOSITIO II.

Ad datum punctum, datæ rectæ lineæ æquam rectam lineam ducere.

Sit datum punctum A, data verò linea recta B C. Volo ad A punctum, ipsi B C rectæ lineæ æqualem lineam ducere. Alterum terminorum ipsius B C connecto cum puncto A: scilicet terminum C, ducta, per primam Petitionem, recta linea C A. Tum centro C, interuallo verò C B, describo Circulum B E B, per tertiam Petitionem. Cuius peripheria si transeat per punctum A, habeo quod volui: Erit enim per Centri definitionem, C A ipsi C B æqualis. Sin aliorsùm transeat constituam super C A, Triangulum ęquilaterum A C D, per primam Propositionem, (seu Isosceles, per ea quæ illic addidimus, nihil enim refert, modò A D & C D latera ipsius sint æqualia): Cuius latus D C protraham ad punctum E peripheriæ. Tum centro D, interuallo autem D E describam alterum Circulum E F E: & ad punctum F ipsius Peripheriæ protraham latus D A. Dico A F esse ipsi B C æqualem.

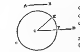


Duæ enim C B & C E sunt æquales: quum sit vtraque à centro ad peripheriam. Duæ item D E & D F, eadem ratione æquales. Sed D C & D A æquales, ex constructione: quum sint latera Trianguli Æquilateri: aut Isoscelis si placet. Si itaque auferantur D C & D A æquales, ex D E & D F æqualibus: remanebunt, per tertiam animi Notionem, C E & A F æquales. At B C ipsi C E ostensa est æqualis. Duæ igitur B C & A F ipsi C E æquales: ob idq; & inuicem æquales, per primam animi Notionem. Quare ad punctum A, ducta est F A ipsi B C æqualis, Quod erat faciendum.

PROBLEMA 3, PROPOSITIO III.

Datis duabus rectis lineis inæqualibus, à maiori lineam minori æqualem abscindere.

Sint duæ lineæ A B & C D inæquales, quarum minor A B. Volo ex C D abscindere partem ipsi A B æqualem.



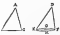
Ad punctum C duco E C ipsi A B æqualem, per secundam Propositionem. Ac centro C, interuallo verò C E, describo Circulum E F G: qui secabit maiorem C D in aliquo puncto: & secet in F. Dico C F esse æqualem A B.

Est enim ipsa æqualis lineæ C E. Sed & A B eidem C E æqualis. Quare, per primam Notionem, C F æqualis A B, Quod erat faciendum.

THEOREMA I, PROPOSITIO IIII.

Si duo Triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint alterum alteri, & angulos binis æquis lateribus contentos æquales: basis quoque basi æqualis erit, ac reliqui anguli ęquis lateribus contenti mutuò æquales: totum denique Triangulum toti Triangulo æquale.

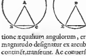
Sint duo Triangula A B C & D E F, quorum vnius duo latera, sint æqualia duobus lateribus alterius: scilicet latus A B æquale lateri D E: & latus A C lateri D F: sitq́, angulus A æqualis angulo D. Dico basin B C basi E F esse æqualem: Angulum item B angulo E, & angulum C angulo F: ac totum Triangulum toti Triangulo æquale.



Superponam Triangulum A B C, Triangulo D E F: vt angulus A cadat super angulum D, latusq́; A B super latus D E, & A C super D F. Eritq́, per octauam animi Notionem, vt nec anguli nec latera sese excedant. Cadent nanque duo puncta B & C super duo E & F. Sicq́, linea B C super lineam E F cadens, erit ipsi æqualis: atque ea ratione angulus B æqualis angulo E, & angulus C angulo F: & totum Triangulum toti Triangulo æquale: quum inter se sic conueniant. Nam si non congruat linea B C cum linea E F, congruentibus punctis B & C ipsis E & F punctis: sed cadat intra Triangulum, vt linea E G F: aut extra, vt linea E H F: duę lineæ claudent superficiem, contra vltimam animi Notionem. Quare duo Triangula A B C & D E F omni ex parte inter se æqualia, Quod fuit demonstrandum.

HÆC EST vulgata omnium Interpretum Demonstratio, si modò hæc Demonstratio dici debeat. Nam si linearum figurarumq́, superpositiones in probationem recipiamus, tota ferè Geometria huiusmodi applicationibus erit referta: vixq́; vlla occurret Propositio, quæ hac ratione non possit probari. Secunda enim iam indè ac tertia, quas modò demonstrauimus, sic probari poterant. Nam si ad datum punctum, linea datæ lineæ æqualis ducenda sit: illicò translata linea ad ipsum punctum, absolutum erit negotium: Applicatio verò quanuis superpositione sit tolerabilior, tamen in Geometria repudiatur: immò ne lineam quidem transportare licet, vt secundùm ipsius magnitudinem, Circulum describamus: quin prius æqualis linea ducta sit. Alioqui secunda prorsus vacaret. Tum si à maiori linea, minor sit abscindenda: quid aliud quàm maiori minorem superponemus, vt quod superat resecemus? Sed hoc quàm sit à Geometriæ dignitate alienum, eorum iudicio relinquo qui Demonstrationis vim & energiam animo concipiunt. Quid ergo huc afferemus, vt Euclidem à reprehensione vindicemus? Neque enim ex tam paucis quas hactenus præmisit, Propositionibus, hoc Theorema confirmari posse videtur. Huic obiectationi, meo iudicio, sic occurri poterit: vt dicamus, hoc Theorema per se clarum esse, neque probatione egere: sed Definitionis cuiusdam loco habendum

esse. Nam quum de re aliqua sermonem instituimus: ea nobis tacitè per definitionem subit in animum: Non enim duos angulos æquales esse cogitabo, nisi quid sit æquales esse angulos concipiam. Quod respiciens Euclides, angulorum æqualitatem proponere, atque eadem opera definire voluit: vt hoc Theorema pro Definitione haberemus. Nemo enim significantius explicabit angulorum æqualitatem, quàm si dixerit duos angulos æquales fieri, quum duo latera vnum angulum continentia, duobus alterum angulum continentibus fiunt æqualia, & bases quæ latera connectunt, æquales. Constat enim angulum tantum esse, quanta est duarum linearum ipsum continentium apertio, seu diductio, hanc verò tantam esse, quanta est basis, hoc est, linea ipsas connectens. Atque vt clarè dicam, tantus est angulus B A C, quanta est remotio lineæ A C ab ipsa A B: tanta verò efficitur remotio, quantam exhibet linea B C. Hoc autem in Isoscelibus est euidentius. Sint enim duo Isoscelia A B C & D E F: quorum vnius duo latera A B & A C duobus D E & D F alterius sint æqualia: angulusq́ A angulo D. Ac positis centris in A & D punctis, ducantur duo Circuli: prior secundum A B, alter secundum D E spatium. Horum prior manifestò transibit per B & C: alter verò per E & F puncta: quum A B & A C, itemq́ D E & E F sint æqualia, & à centro vtrinq́ exeuntia. Atque, ex definitione æqualium angulorum, erunt arcus B C & E F æquales. Angulorum enim magnitudo designatur ex arcubus Circulorum qui per extremas lineas quæ angulos continēt, transeunt. Ac conuerso modo, æquales anguli atque æqualibus lineis comprehensi, æquales subtendunt peripherias. Quum enim æqualia sint spatia B C & E F, ea æqualibus rectis lineis claudi oportet: propterea quòd recta linea, est à puncto ad punctum via breuissima. Atque haud dissimili iudicio, ex laterum ratione & basium, quanta sit angulorum magnitudo æstimabimus. Quur ergo Euclides hoc inter Theoremata reposuit, non inter Principia præmisit? Nimirùm, quum speciem quodammodo mixtam Principij & Theorematis præ se ferret: Principij, quòd in communi animi iudicio consisteret: Theorematis, quòd speciatim Triangula Triangulis comparanda proponeret: maluit Euclides inter Theoremata referre: præsertim quum multa haberet capita, Principium verò simplex ac velut nudum esse debeat. Ex hoc prætereà Axiomate tanquam ex locupletissimo Demonstrationum themate, multæ Propositiones consequi debebant, eiusdem propè facilitatis & iudicij: quas, quia erant notissimæ, inter Principia annumerari non conueniebat. Paucis enim Principijs Geometriam contentam esse oportebat: immò multa Principia consultò supprimuntur, ne sit onerosa multitudo: vt etiam quæ exprimuntur, tantùm ad exemplum exprimi videantur. Hûc accedit, quòd primum Theorema facile, perspicuum, ac sensui obuium esse debebat, pro Geometriæ lege, quæ ex paruis humilibusq́ initijs, in progressus mirabiles sese extollit.



Huius itaque Propositionis veritatem non aliunde quàm à communi iudicio petemus: cogitabimusq́ Figuras Figuris superponere, Mechanicum quippiam esse: intelligere verò, id demùm esse Mathematicum. Iam verò quum fuerit confessum duo Triangula inuicem esse æquilatera, ipsa quoque inter se æqualia fateri erit necessarium. Etenim nulla euidentiori specie æqualitas Figurarum dignoscitur, quàm ex laterum æqualitate: quanquam Circulorum æqualitas ex diametris definitur: sed non aliam ob causam, quàm quòd linea obliqua sui copiam adeò apertè non facit vt recta: Cuius mensuram facilè capimus, ac per eam, obliquarum inter se comparationem facimus.

At si hæc superpositio aliqua ratione admittenda sit: tolerabilior sanè fuerit hoc qui sequitur modo.

Manente duorum Triangulorum A B C & D E F conditione, continuabo E D

vsque

vſque ad G punctum, per primam Petitionem: & ponam D G æqualem A B, per ſecundam Propoſitionem. Atque itidem continuata F D, ponam D H æqualem A C. Tum ſuper puncto D, ducam duos Circulos: alterum ſpatio D G, alterum ſpatio D H. Quorum prior manifeſtò tranſit per punctum E, quum ſint D E & D G æquales: alter verò per punctum F, ob eandem rationem. Iam à puncto D duco lineam rectam D L ad E punctum: quæ omninò tranſibit ſuper D E. Nam ſi extrà tranſeat vt D M L aut D N L: duæ rectæ lineæ concludent ſuperficiem, contra vltimam animi Notionem. Itidem ab eodem D puncto, ducam lineam H K: quæ etiam efficietur eadem cum linea D F. Ac demùm Linea L K ducta efficietur eadem cum linea E F. Iam verò manifeſtum eſt lineam D L eſſe æqualem lineæ D G, ac propterea ipſi A B, ex conſtructione & animi Notione: lineam quoque D K eſſe æqualem D H, ſeu A C: atque angulum L H K eſſe æqualem angulo D E F, immò eundem: ac propterea æqualem angulo B A C: ſpatiumq́ comprehenſum à lineis D L & D K, eſſe omninò æquale ſpatio comprehenſo à lineis A B & A C. At ſpatium L H K clauditur linea æquali, immò eadem cum linea E F. Et ſpatium igitur B A C claudetur linea æquali ipſi E F lineæ. Quare æqualis E F ipſi B C, Quod erat demonſtrandum.



Hinc patent reliqua Theorematis capita: nempè reliquorum angulorũ inter ſe, & duorum Triangulorum æqualitas. Neq; eſt quòd contendat quis, eandem eſſe vtrobique rationem applicationis Triangulorum. Aliud nanque eſt, Triangula tranſponere, quàm per ſimile & æquale demonſtrare. Probatio enim hæc vltima è Circuli pendet officio.

THEOREMA 2, PROPOSITIO V.

Iſoſcelium Triangulorum qui ad baſin ſunt anguli, inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus lineis, qui ſub baſi ſunt anguli, inter ſe quoque ſunt æquales.

Sit Triangulum A B C, cuius duo latera A B & A C ſint æqualia. Dico angulum A B C æqualem eſſe angulo A C B: Et ſi protrahantur A B & A C, vt ad D & E puncta: angulum D B C æqualem eſſe angulo B C B.

Ponam, per tertiam Propoſitionem, lineam A D æqualem lineæ A B: ductisq; D C & E B, intelligam duo Triangula A B E & A C D. Et quoniam duo latera A B & A E Trianguli A B E, ſunt æqualia duobus lateribus A C & A D Trianguli A C D: & angulus A vtrique communis: erit, per antecedentem, baſis E B, baſi C D æqualis: & angulus E angulo D, angulusq; A B E, angulo A C D. Rurſus intellectis duobus Triangulis B C D & C B E, erunt duo latera B C & C D Trianguli B C D, æqualia duobus lateribus C B & E B Trianguli C B E. Et quia angulus D vnius æqualis eſt angulo E alterius, vt iam probauimus: erit, per antecedentem, B C D Triangulum, ipſi C B E Triãgulo æquale: ac propterea angulus B C D, angulo C B E æqualis. Quum itaque totus angulus A B E probatus ſit toti angulo A C D æqualis: ablato B C D à toto A B E, ablatoq; C B B à toto A C D: ſupererunt A B C & A C B anguli, per communem Notionem, æquales, Quod eſt prius. Et quoniam, per ipſam antecedentem, angulus B C E ipſi C B D angulo eſt æqualis: patet ſecundum.



Atque vt oſtenderemus quantum poſſit vbique Circulus, deſcripſimus A F D ſe-

micirculum, secundùm spatium B A: cuius centrum B: & alterum A G E, secundùm spatium C A: cuius centrum C. Nam integros Circulos describere non erat necessarium. Vbi, ex Centri & Circuli definitione, constat lineas A B, B D: A C & C E æquales esse inter se: quum exeant à centris Circulorum æqualium: ac proptereà A B & A B æquales inter se, ex communi Notione. Ac tum procedet demonstratio modò posita, meo iudicio facilior. Triangulorum enim æqualitas sese euidentiorem exhibet.

HIC etiam obiter monebimus hanc Propositionē in communi iudicio positam esse, vt superiorem. Nam si duo Triangula pro vno intelligamus: scilicet Triangulum A B C, cuius basis A C: & Triangulum A C D, cuius basis A D: quum duo latera A B & B C vnius, sint æqualia duobus A C & C B alterius, basisq; A C æqualis basi A B: erit, ex definitione æqualium angulorum, seu per antecedentem, A B C angulus, æqualis A C B angulo, Quod est prius. Tum, ex posteriori nostra constructione, de duobus angulis B C E & C B D idem erit iudicium: quum probatæ fuerint bases B E & C D æquales.

THEOREMA 3, PROPOSITIO VI.

Cuiuscunque Trianguli duo anguli æquales fuerint: duo quoq; latera illos angulos subtendentia, æqualia erunt.

Hæc est Conuersa prioris partis antecedentis Propositionis. Sit Triangulū A B C, cuius duo anguli B & C sint æquales. Dico latus A B esse æquale lateri A C.



Nam si æqualia non sint: maius sit A B, si fieri possit: à quo rescindatur D B æquale ipsi A C, per tertiam Propositionem: vt sint duo Triangula A C B & D B C. Et quoniam duo latera D B & B C, Trianguli D B C, sunt æqualia duobus lateribus A C & C B, Trianguli A C B: & angulus B æqualis angulo C toti, ex hypothesi: erit per quartam, basis B C, basi A B æqualis: & angulus D C B angulo A B C æqualis. Quare quum angulus A C B, angulo A B C sit positus æqualis: erit, per primam animi Notionem, angulus D C B, angulo A C B æqualis, pars toti: quod esse non potest.

ANIMADVERTENDVM, Conuersas Propositionū in vniuersum esse veras, sicut & Principiorum. Quum enim dicimus, Quæ sunt vni æqualia, inter se sunt æqualia: simul cognoscimus, si vnum quippiam fuerit duobus æquale, hæc duo inter se æqualia esse: Et, Si duo reliqua æqualia fuerint, & partes ab vtraque ablatæ æquales: tota quoque constat fuisse æqualia. Horum itaque Conuersas reticuit Euclides vt notissimas: Propositionum verò expressit, quòd minus simplices essent, neque magis per se notæ quàm Directæ ipsæ: Deinde, quòd non statim ad suas Directas consequerentur, vt ad Principia suæ: & nonnunquam externis probationibus egerent, vt in sequentibus passim occurret.

THEOREMA 4, PROPOSITIO VII.

Si à duobus punctis lineam terminantibus duæ lineæ exeuntes, concurrerint: ab iisdem punctis ad eandem partem duæ aliæ non educentur, his duabus, & vtraque suæ conterminæ, æquales.

Sit linea A B, à cuius terminis A & B, exeant duæ lineæ A C & B C concurrentes ad punctum C. Dico duas alias lineas, vt A D & B D, ab iisdem punctis A & B, & ad eandem partem, educi non posse, quæ duabus A C & B C vtraque suæ conterminæ æquales sit: scilicet A D ipsi A C, & B D ipsi B C.

Quòd

Quòd si fieri possit, rum concurrent A D & B D intra Triangulum A B C, aut extra (neque enim in A C aut B C concurrent. esset nanque pars toti æqualis). Si ergo concurrant extra Triangulum: aut altera illarum secabit Triangulum, aut neutra. Et secet prius altera, nempe A D, Trianguli latus B C: & connectatur C D: vt duo sint Triangula A C D & B C D.



Et quoniam Trianguli A C D, duo latera A C & A D sunt æqualia: erit angulus A C D æqualis angulo A D C, per quintã Propositionem. Itidem quia Trianguli B C D, duo latera B C & B D sunt æqualia: erunt duo anguli B C D & B D C æquales. Et quia angulus B D C est maior angulo A D C: erit angulus B C D maior angulo A C D: per animi Notionem: Nam si duo æqualia, sint maiora tertio: erunt & maiora eo quod ipsi tertio est æquale. Erit igitur pars maior toto, Quod fieri non potest.

Si verò neutra secuerit Triangulum: connectam D C: & producam B C & B D ad E & F puncta, vt duo sint anguli E C D & F D C, sub basi C D.

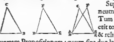


Et quoniam duo latera A C & A D Trianguli A C D, sunt æqualia: erunt anguli A C D & A D C, per quintam Propositionem, æquales. Rursus quia duo latera B C & B D Trianguli B C D, sunt æqualia: erunt duo anguli E C D & F D C sub basi, æquales, per alteram partem eiusdem. Quia ergo angulus E C D minor est angulo A C D: erit angulus F D C minor angulo A D C, totum parte. In idem absurdum intrudetur, siquis A D & B D dixerit conuenire intra Triangulum.

THEOREMA 5, PROPOSITIO VIII.

Si duo Triangula duo latera duobus lateribus mutuò æqualia habuerint, & basin basi æqualem: angulos quoq; illis æquis lateribus cõtentos æquales habebunt.

Sint duo Triangula A B C & D E F: sitq; latus A C æquale lateri D F, & B C æquale E F: basisq; A B æqualis basi D E. Dico angulum C esse æqualem angulo F, & angulum A angulo D, & angulum B angulo E.



Superposita enim basi A B ipsi D E basi, neutra exceedet alteram: quum sint æquales. Tum si angulus C conuenit cum angulo F: erit totum Triangulum toti Triangulo æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, per quartam Propositionem: quum sint duo latera A C & B C, duobus D F & E F æqualia. Si verò punctum C non cadat super F punctum, sed cadat extra: tunc à duobus punctis D & E, duæ lineæ exeuntes A C & B C, concurrent: simulq; D F & E F ad eandem partem, binæ suis conterminis erunt æquales, Quod per antecedentem fieri non potest.

Hanc demonstrandi rationem in quarta huius abundè refutauimus. Quare hæc Propositio tanquam per se nota habenda est. Quis enim negauerit duas Superficies esse æquales, quarum latera & quantitate & numero sunt æqualia? Vel ea demonstrabimus ratione quam illîc tradidimus.

THEOREMA 6, PROPOSITIO IX.

Datum Angulum bifariam diuidere.

Sit datus Angulus A B C, quem oportet in duo æqualia diuidere. Lineam A B

b 4 notabo

notabo puncto fortuito D; & ex linea B C resecabo, per tertiam Propositionem, B E ipsi B D æqualem: & connectam D E. Tum super D E constituam, per primam Propositionem, Triangulum æquilaterum D E F: & ducam B F lineam. Hanc dico esse quæ diuidit angulum B datum in duo æqualia: scilicet duos angulos qui ad B, esse æquales. Intelligo enim duo Triangula D B F & E B F. Et quoniam duo latera B D & B F, Trianguli B D F, sunt æqualia duobus lateribus B E & B F, Trianguli B E F: illiusq; basis D F, huius basi E F, æqualis: erit, per antecedentem, angulus D B F, angulo E B F æqualis, Quod facere oportuit.



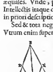
HANC DEMONSTRATIONIS formulam penè ad verbum adscribunt omnes: sed certè non satis firmam. Quid enim si aduersarius contendat vnum ex lateribus Trianguli æquilateri super D E constituti cadere in alteram linearum A B aut C D: vt in subiecta Figura Triangulum C D E sit æquilaterum? Tunc non erit locus ducendæ lineæ B F, propterea quòd esset eadem cum B C. Occurrendum itaque fuit huic dubio per Quintam huius, positis D A & E C æqualibus, ductaq; A E linea. Illic enim probatum est, latera C D & C E æqualia esse non posse: quum sint duo anguli C D E & C E D inæquales. Ac tum stabit Demonstratio.



Sed & ex hac posteriori constructione, pulchra ostenditur ratio huiusce Problematis demonstrandi. Quum enim duæ lineæ A E & C D sursùm ductæ ad puncta opposita D & E sese manifestò secent: si ducatur linea ab angulo dato B ad punctum intersectionis earum, vt linea B F: hæc diuidet angulum ipsum in duo æqualia.

Nam, per ea quæ ibidem demonstrata sunt, & ex quarta huius: sunt ambo Triangula A D E & C E D inter se æquilatera & æquiangula: propterea quòd duo anguli A D E & C E D sunt, per secundam partem quintæ, æquales: & duo latera A D & D E æqualia duobus C E & E D: ob idq; duo anguli C D E & A E D æquales. Vnde, per sextam, duo latera D F & E F, Trianguli D E F, æqualia. Intellectis itaque duobus Triangulis B D F & B E F, procedet Demonstratio vt in priori descriptione.

Sed & tota negotij huius ratio è Circulo depromitur: hoc est, ab æqualitate. Vtrum enim super linea D E constituatur Triangulum Æquilaterum an Isosceles, nihil interest: modò ad concursum duorum laterum æqualium ducatur linea: quæ hoc loco est linea B F.



Punctum verò concursus, hoc est, punctum F, in intersectione duorum Circulorum æqualium situm erit: quorum centra D & E: vt in postremo Schemate: in quo ductis lineis D F & E F, constabit Demonstratio. Nam quum duo latera B D & D F, Trianguli B D F, sint æqualia duobus B E & E F, Trianguli E E F, basisq; B F vtrique communis: erunt duo anguli qui ad B inter se æquales. Satis autem esse visum est, si duorum Circulorum intersectionem appingeremus: sicut & deinceps faciemus, compendij causa.

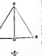
Hîc etiam animaduertes, Trianguli Isoscelis vsum in Demonstrationibus firmiorem esse quàm Æquilateri.

PROBLEMA 5, PROPOSITIO X.

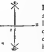
Datam rectam lineam in duo æqualia secare.

Sit data linea A B, secanda in duo æqualia. Super hanc constituo Triangulum Æquilaterum (vel Isosceles, in idem enim recidit) sitque A B C. Cuius angulum C,

per



per antecedentem, diuido in duo æqualia, ducta linea C D. Dico lineam A B bipartitò diuisam in puncto D. Intellectis enim duobus Triangulis A C D & B C D · erunt duo latera A C & C D, Trianguli A C D, æqualia duobus B C & C D, Trianguli B C D : & angulus C vnius, æqualis angulo C alterius. Quare, per quartam, erit basis A D æqualis basi D B, Quod erat faciendum.



HVIVS quoq; Problematis compendium è Circulo pendet. Positis enim centris in A & B punctis, liberisq; interuallis, sed æqualibus: quæ vtrinque ad oppositas intersectiones ducetur linea, secabit A B per æqualia: Qualis est hoc loco linea C D quæ in puncto E, lineam A B æqualiter diuidit. Intelliguntur enim duci A C & B C: vt fiant A E C & B E C Triangula inter se æquilatera.

PROBLEMA 6, PROPOSITIO XI.

Data recta linea, à puncto in ea dato lineam ad perpendiculum erigere.

Sit data recta linea A B, & in ea datum punctum C: à quo linea perpendicularis excitanda sit. Pono C B æqualem A C, per tertiam: & super totam A B constituo, per primam, Triangulum A B D Æquilaterum (vel Isosceles, semper intelligo): Et à puncto C excito lineam C D. Hanc dico esse perperdicularem ad punctum C.



Quoniam enim duo Triangula A C D & B C D, ex ipsa constructione, sunt inter se æquilatera, & per octauam, æquiangula: erunt duo anguli qui ad C æquales, ac propterea recti, per decimam Definitionem. Quare, per eandem, linea C D perpendicularis, Quod erat faciendum.

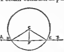
Hìc etiam satis agnoscitur Circuli vsus, eadem omninò descriptione obseruata quam in superiore exhibuimus. Illìc enim anguli qui ad E, fuerunt æquales: ac propterea recti.

PROBLEMA 7, PROPOSITIO XII.

Ad datam rectam lineam interminatam, à puncto extra ipsam dato perpendicularem ducere.

Sit data linea interminata A B: punctum verò extra ipsam datum C: à quo ad ipsam A B sit ducenda perpendicularis.

Ponam centrum in puncto C, & describam Circulum, qui tantus sit, vt secet A B in duobus punctis, vt in D & E: Ductisq; lineis C D & C E, facio Triangulum C D E: Cuius angulum C diuidat in duo æqualia, per nonam, linea C F demissa in D E latus, secans ipsum in F puncto. Hanc dico esse perpendicularem super A B. Eritq; argumentatio eadem quæ in antecedente.



Quum enim duo latera C D & C F, Trianguli C D F, sint æqualia duobus lateribus C E & C F, Trianguli C E F, & angulus C vnius æqualis angulo C alterius: erit, per quartam, basis D F æqualis basi E F: & duo anguli qui ad F æquales, ob idq; recti, per decimam Definitionem. Quare linea C F perpendicularis super A B, Quod erat constitutum.

THEO

THEOREMA 6, PROPOSITIO XIII.

Quum recta linea ſuper rectam ſteterit: duos angulos aut rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea A B ſtet ſuper rectam C D. Dico duos angulos A B C & A B D, eſſe aut rectos, aut duobus rectis æquales.

Nam ſi ipſa A B perpendicularis fuerit, ſatis liquet angulos eſſe rectos, per Conuerſionem decimæ Definitionis. Sin autem inclinet in limitem D: erigam ſuper C D, per vndecimam, à puncto B perpendicularem B E. Ex qua iam ſtructura ſatis



patet propoſitio. Nam quum angulus A B C tanto maior ſit angulo C B E recto, quantus eſt angulus A B E: ſitq́, alter angulus A B D tanto minor angulo D B E itidem recto, quantus eſt idem ipſe angulus A B E: ablato quod illi abundat, vt addatur quod huic deeſt: fient duo anguli recti.

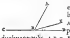
Scilicet, ſi ab angulo A B C obtuſo, auferatur angulus A B E: manebit C B E rectus. Tum ſi idem A B E addatur angulo D B A acuto: efficietur angulus D B E rectus. Quapropter hîc non opus eſt alia argumentationis forma. Eſt enim ex iis quæ intellectum turbare potius quàm iuuare poſſit. Satis enim manifeſtum eſt duos angulos, nempè A B C obtuſum & A B D acutum, æquale, immò vnum & idem complecti ſpatium cum duobus angulis C B E & D B E rectis.

THEOREMA 7, PROPOSITIO XIIII.

Si ad aliquod rectæ lineæ punctum duæ rectę lineæ coïerint, duosq; angulos cum ipſa aut rectos aut duobus rectis æquales fecerint: ambæ in continuum erunt & linea vna.

Sit linea recta A B: ad cuius punctum B duæ rectæ coeant, C B & D B: duoq; anguli C B A & D B A, aut ſint recti, aut duobus rectis æquales. Dico ambas C B & B D ſibi eſſe in directum: ſcilicet, C D eſſe lineam vnam.

Si enim non ſit linea vna, tunc C B continuata, verbi gratia, ad punctum E, tranſibit ſupra B D, aut infra. Tranſeat ergo ſuprà, ſi fieri poſſit: vt ſit C E linea vna.



Quum itaque recta linea A B ſuper rectam C E cadat: erunt, per antecedentem, duo anguli A B C & A B E, duobus rectis æquales. Rurſus, quum duo anguli A B C & A B D ſint duobus rectis æquales, per hypotheſin: erunt, per primam Notionem, duo anguli A B C & A B E, æquales duobus angulis A B C & A B D. Communis auferatur A B C: relinquetur angulus A B E, per tertiam animi Notionem, angulo A B D æqualis, pars toti, Quod eſt abſurdum. Eadem ratione probabitur C B protracta non cadere infra B D. Erit igitur C D linea vna, Quod erat oſtendendum.

Sed & primo ſtatim intuitu ſic ratiocinabimur. Duo anguli C B A & A B E, ſunt pars duorum C B A & A B D. At C B A & A B D ſunt æquales duobus rectis, per hypotheſin. Quare non erunt duo C B A & A B E æquales duobus rectis, ne ſit pars toti æqualis.

THEOREMA 8, PROPOSITIO XV.

Si recta linea rectam lineam ſecuerit: angulos ſectionis oppoſitos æquales efficiet.

Sit recta

Sit recta linea A B, secans rectam C D in puncto E. Dico angulum A E C, æqualem esse angulo D E B: & angulum B E C, æqualem angulo A E D.



Quoniam enim duo anguli A E C & C E B, per decimamtertiam, duobus rectis sunt æquales: itemq; duo anguli C E B & D E B, duobus rectis æquales: erunt, per primam Notionem, duo anguli A E C & D E B, æquales duobus C E B & D E B. Ablato igitur cōmuni C E B, supererunt, per tertiā Notionē, duo anguli, A E C & D E B æquales. Similiter probabuntur duo anguli A E D & C E D æquales.

Ex hac consequitur illud,

Duæ lineæ rectæ se decussantes, quatuor angulos rectos faciunt, aut quatuor rectis æquales.

Conuersam huius decimæquintæ adscripsimus in hæc verba,

Si quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes, quatuor angulos fecerint, quorum bini oppositi æquales fuerint: binæ aduersæ lineæ in rectum sibi erunt & linea vna.

Sint quatuor lineæ A B, A C, A D & A E, exeuntes à puncto A, constituentes quatuor angulos ad ipsum A punctum: quorum angulus B A C sit æqualis angulo D A E: & angulus B A D, angulo C A E. Dico B E & C D esse duas tantùm lineas: hoc est, duas B A & A E esse sibi in continuum, & vnicam efficere lineam: duas itidem C A & A D, vnicam.



Sin aliter: ponatur, si fieri possit, E F linea vna: & C G itidem vna. Quum itaq; recta E A incidat in C G rectam: erunt duo anguli E A C & E A G, per decimamtertiam, duobus rectis æquales. Quumq; recta G A super rectam E F incidat: erunt, per eandem, duo anguli E A G & F A G, duobus rectis æquales. Communi igitur ablato E A G: erit per communem sentētiam, angulus E A C, æqualis angulo F A C. Sed & ipse E A C positus fuit æqualis angulo B A D. Erit ergo B A D ipsi F A C æqualis, pars toti, Quod esse non potest. Idem omninò proueniet absurdum, in quancunque partem protrahantur lineæ. Quare B E vna est linea, & C D vna, Quod fuit demonstrandum.

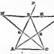
THEOREMA 9, PROPOSITIO XVI.

Omnis Trianguli vno latere producto, exterior angulus vtrolibet interiori opposito maior est.

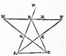
Sit Triangulum A B C, Cuius latus A B protrahatur ad punctum D. Dico angulum D B C, maiorem vtrolibet angulorum A C B & B A C.

Diuidam B C æqualiter, per decimam Propositionem, in puncto E: & connectam A E: quam protraham ad punctum F. & ponam E F æqualem ipsi A E, per tertiam: & connectam F B: vt duo sint Triangula A E C & F E B.

Primùm itaque ostendemus ipsum D B C angulum, maiorem esse angulo B C A interiori. Quoniam enim duo latera A E & E C, Trianguli A E C, sunt æqualia duobus lateribus E F & E B, Trianguli F E B: & angulus E vnius, per antecedentem, angulo E alterius æqualis: erit per quartam, angulus E B F æqualis angulo E C A. Sed angulus D B C maior est angulo E B F. Quare, per animi Notionem, erit & maior angulo E C A, Quod erat probandum.



Eadem ratione probabimus angulum C B D, maiorem esse angulo C A B: diuisa scilicet B A in duo æqualia, in puncto G, ductaq; C G & protracta ad punctum H, vt sint C G & H G æquales: ac demùm connexa H B, & protracta in K punctum. Intelligo enim duo Triangula A C G & G B H: Quorum

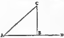


rum latera A G & C G, lateribus B G & H G sunt mutuò equalia: & angulus G vnius, per antecedentẽ, angulo G alterius æqualis: & per quartã, angulus G B H, angulo G A C: & per antecedentem & animi Notionẽ, angulus D B K eidem G A C æqualis. At D B C maior est quàm D B K: Quare & maior quàm G A C, Quod erat demonstrãdum.

Linea H B protracta est ad K: quoniã adhuc non constat H B & B F esse in directum: quanuis res ipsa sic habeat. Sed est Mathematici, dubitationibus quibuscunque occurrere.

ALITER. Sit Triangulum A B C, cuius latus A B protrahatur ad punctum D. Dico angulum D B C maiorem esse vtrolibet angulorum B A C & A C B.

Quoniam enim duæ lineæ A C & B C coeunt in puncto C, & in ipsas incidit recta A B: erunt, per conuersum modum quintæ Petitionis, duo anguli interiores & ex eadem parte, scilicet A B C & C A B, duobus rectis minores. Sed anguli A B C



& D B C, per decimamtertiam, duobus rectis sunt æquales. Duo igitur ipsi A B C & D B C maiores sunt duobus A B C & B A C. Quare dempto communi A B C, relinquetur angulus D B C maior angulo B A C. Eadem ratione, quum duæ lineæ B A & C A coeant in puncto A, & in eas recta incidat C B: erunt duo anguli interiores A B C & A C B duobus rectis minores. Sed A B C & D B C duobus rectis sunt æquales. Sunt igitur duo anguli A B C & D B C duobus A B C & A C B maiores. Quare ablato communi A B C, supererit vt angulus D B C maior sit angulo A C B, Quod erat demonstrandum:

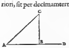
THEOREMA 10, PROPOSITIO XVII.

Bini anguli cuiuslibet Trianguli, quomodocunque sumantur, duobus rectis sunt minores.

Poterat commodè hoc Theorema cum antecedente connecti. Illo enim cognito statim hoc notum euadit: sicut Euclides posteà facturus est in ea Propositione quæ est ordine Trigesima secunda. Vtriusque enim par est ratio & consecutio.

Sit Triangulum A B C. Dico binos ipsius, quomodocunque sumantur, angulos minores esse duobus rectis.

Protracto enim latere D B ad punctum D, quum angulus B exterior, sit per antecedentem, maior vtrolibet angulorum D & C: idem ipse B exterior cum B interiori, sit per decimamtertiam, duobus rectis æquales: erunt, per communem Notionem, angulus A & angulus B interior, duobus rectis minores: similiterq́, angulus C & idem B interior, duobus rectis minores, Quod erat demonstrandum.



Sic igitur instruetur argumentatio. Angulus A interior cum angulo B exteriori est æqualis duobus rectis, per decimamtertiam: sed angulus A (vt & angulus E) cum angulo B interiori, per antecedentem, minor est duobus angulis B interiori & exteriori. Est ergò angulus A (vt angulus C) cum angulo B interiori, minor duobus rectis, Quod erat demonstrãdum.

Sed & sine antecedentis adminiculo, argumentari possumus per Conuersam quintæ Petitionis, & per decimamtertiam Propositionem: sicut in superiore fecimus.

THEOREMA 11, PROPOSITIO XVIII.

Maius latus cuiuslibet Trianguli, maiorem subtendit angulum.

Sit Triangulum A B C, cuius latus A C sit maius latere A B. Dico angulum A B C, maiorem esse angulo B C A.

Ex

Ex latere A C maiori abſcindam, per tertiam, A D æquale ipſi A B. & connectam B D.



Intellectis igitur duobus Triangulis A B D & B C D, erunt duo anguli A B D & A D B, Trianguli A B D, per quintam, inter ſe æquales. Atqui angulus A D B maior eſt, per decimamſextam, angulo B C D interiori oppoſito: Ob idq́, angulus A B D eodem angulo B C D maior. Quare & angulus A B C totus, multo maior ipſo B C D angulo, Quod erat oſtendendum.

Quòd ſi latus A B ponatur maius latere B C: iiſdem argumentis probabitur angulus C maior angulo A: reſecto A B ad æqualitatem B C. Ac in ſumma, binorum quorumcunque laterum comparatio iiſdem rationibus nitetur, reſciſſo ſemper maiore ad æqualitatem minoris.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XIX.

Maior angulus cuiuslibet Trianguli, maiori etiam lateri opponitur.



Sit Triangulum A B C, cuius angulus B maior ſit angulo C. Dico latus A C maius eſſe latere A B.

Primùm enim æquale eſſe non poteſt latus A C lateri A B: Eſſet enim, per quintam, angulus B æqualis angulo C, contra hypotheſin. Minus etiam non erit: Minor enim eſſet angulus B angulo C, per antecedentem, contra hypotheſin. Hoc Theorema annecti poterat ſuperiori.

THEOREMA 13, PROPOSITIO XX.

Duo latera cuiuslibet Trianguli reliquo ſunt maiora, quomodocunque ſumpta.

Sit Triangulum A B C. Dico duo latera A B & A C ſimul ſumpta, reliquo B C eſſe maiora.



Protraham B A ad punctum D, & ponam A D æqualem ipſi A C, per tertiam: & connectam C D. Et quoniam duo anguli A C D & A D C ſunt, per quintam, æquales: erit B C D maior ipſo A D C: quum ſit maior quàm A C D. Vnde, per antecedentem, latus B D maius erit latere B C. Atqui latus B D æquale eſt lateribus A B & A C. Sunt igitur latera A B & A C maiora latere B C, Quod fuit demonſtrandum.

Eadem erit probandi ratio, ſi bina quæuis latera cum tertio comparentur.

EX RECTO etiam demonſtrabimus in hunc modum. Sit Triangulum A B C: cuius latus B C, lucidioris doctrinæ gratia, ponatur maximum trium laterum: vt quum probatum fuerit de maximo, nulla ſit de vtrouis reliquorum controuerſia. Dico duo latera A B & A C ſimul ſumpta, maiora eſſe latere B C.

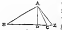
A puncto A in rectam B C, per duodecimam, demitto perpendicularem A D: vt duo ſint Triangula A B D & A D C. Et quia vterque angulus qui ad D rectus



eſt: erit, per decimamſeptimam, angulus A D B maior angulo B A D: &, per decimam nonam, latus A B maius latere B D, latusq́ue A C maius latere D C. Sed B D & D C conſtituunt ipſum B C. Erunt igitur duo latera A B & A C maiora latere B C, Quod erat demonſtrandum.

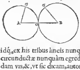
Quòd ſi linea perpendicularis ſit eadem cum latere A C, tum B C non erit maximum laterum, per decimamſeptimam & decimamnonam. Quapropter erit dedu-

C cenda



cenda perpendicularis ad A B latus maximum. Si verò aduersarius contendat lineã perpendicularẽ cadere extra Triangulum, vt lineã A E: tum angulus A C E maior erit, per decimãsextã, angulo A E C recto, exterior interiori. Vnde A B, per decimãseptimam & decimamnonã, maius esset vtrolibet laterũ A C & B C, contra hypothesin.

HOC NOBIS Theorema ratio magnitudinum præscribit. Nam quum super duos terminos A & B lineæ A B statuerimus duas lineas A G & B G, quæ simul iunctæ tantùm sint æquales ipsi A B: si ambæ inclinari cœperint altera alteram versùs, stantibus fixis A & B punctis: duo ipsarũ puncta quæ ad G, non prius coibunt quàm super A B iaceant, & vnum punctum G efficiãt. Quod ex Circulis secundùm ambarum linearum quãtitatem ductis, positisq́, centris in A & B, est manifestum. Hi enim nusquam secant inter se, vt hîc adscriptum vides: Ob idq́, ex his tribus lineis nunquàm conflabitur Triangulum. Duæ enim A C & B G circunductæ nunquàm egredientur peripheriam. In hoc etiam extat præcipua quædam vis, &, vt sic dicam, autoritas Circuli: immò Naturæ quædam præstantia, quæ in Geometricis passim relucet.



THEOREMA 14, PROPOSITIO XXI.

Si à duobus terminis vnius laterum Trianguli duæ lineæ exeuntes, intra Triangulum coïerint: hæ reliquis duobus Trianguli lateribus minores erunt, & maiorem angulum continebunt.

Sit Triangulum A B C: & à duobus terminis B & C lateris B C, exeant duæ lineæ B D & C D, coeuntes intra Triangulum in puncto D. Dico duas B D & C D minores esse duabus A B & A C: Et angulum B D C maiorem angulo B A C.



Producam B D donec secet A C in puncto E. Et quoniam duo latera AB & AE Trianguli ABE, sunt, per vigesimam, maiora tertio BE: Et per eandem, DE & EC maiora tertio DC: erunt quatuor AB, AE, DE, & EC, maiora tribus BD, DE, & DC. Commune auferatur DE: erunt tria AB, AE, & EC (ea sunt AB & AC) maiora duobus BD & DC, Quod est prius.

Altera pars sic probatur. Angulus B E C Trianguli B E C, maior est, per decimamsextam, angulo B A C: Et per eandem, angulus B D C maior ipso B D C. Maior ergo B D C ipso B A C, Quod erat demonstrandum.

Prior pars facile patebat, descriptis duobus Circulis secundùm spatium duarum B D & C D, positisq́, centris in B & C. Omninò enim duo Circuli secabunt hinc inde duo latera A B & A C. Ac tum erit æqualitas inter duo segmenta duasq́, B D & C D: Sicq́, per nonam Notionem, erunt A B & A C maiores ipsis D B & D C. Neque enim transibunt Circuli per punctum A, repugnante septima Propositione.



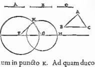
PROBLEMA 8, PROPOSITIO XXII.

Ex tribus rectis lineis quæ tribus datis rectis lineis sint æquales, Triãgulum perficere: Modò tamen duæ illarum quomodocunque sumptæ, reliqua sint maiores.

Sint tres lineæ datæ A, B, C, quarum duæ quomodocunque sumptæ, tertia sint maiores.

maiores. (Alioqui aptæ non essent ad Triangulum constituendum, per vigesimam). Volo ex tribus lineis. Quæ sint his tribus datis æquales, Triangulum conficere.

Ex linea quapiam interminata abscindo, per tertiam, D F æqualem lineæ A: & F G æqualem lineæ B: & G H æqualem lineæ C. Tum centro F, spatio verò F D, describo Circulum D K D: itemq; centro G, spatio verò G H, describo Circulum H K H. Hi duo Circuli se omninò secabũt inter se. Ducta enim linea à centro F ad peripheriã D K D, non haberet quò cõcurreret cum linea ducta à centro G ad peripheriam H K H: sicq; essent ambę simul sumptæ aut æquales ipsi F G, aut eadem minores, contra hypothesin. Sit itaque altera intersectiotium in puncto K. Ad quam duco F K & C K. Dico tria latera Trianguli F G K tribus lineis datis esse æqualia.



Quum enim F G linea, quæ posita est æqualis lineæ B, sit vnum laterum ipsius Trianguli: & latus F G sit æquale lineæ F D, ex Centri definitione, quæ posita est æqualis lineæ A: erit & ipsum F G latus, per primam Notionem, ipsi A æquale. Demùm quum tertium latus G K, eadem lege Centri, sit æquale lineæ G H, quæ ipsa per eandem Notionem, æqualis est lineæ C: constat Propositio.

Hoc Problema in hanc sententiam poterat proponi.

Dato Triangulo Triangulum æquale & æquilaterum constituere.

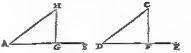
Vt si proponeretur Triangulum A B C, statuerem tres lineas in continuum ad æqualitatem trium laterum ipsius: Et procederet Demonstratio quam modò dedimus, adiumento octauæ & quartæ. Immò adeò poterat statim proponi à tertia Propositione, & solius Circuli officio absolui.

Quod autem de lineis proposuit Euclides, id nos docuit vt dignosceremus vtrum ex tribus datis lineis confici possit Triangulum an non: quod ex ipsis Circulis, si secuerint se inuicem, perspiciemus.

PROBLEMA 9, PROPOSITIO XXII.

Proposita recta linea, ad datum in ea punctum dato angulo rectilineo angulum æqualem constituere.

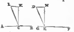
Sit data recta linea A B, datumq; in ea punctum A: datus verò angulus rectilineus C D E. Volo ad datum punctum A angulum rectilineum dato angulo C D E æqualem constituere.



In recta D E signetur punctum liberum F: & connexa C F, fiat Triangulum C D F. Iam ex tribus lineis quæ sint æquales tribus lateribus D F, D C, & C F, constituo Triangulum A G H. Quod quidem, ex ipsa constructione, manifestò æquale est Triangulo D C F: aut si autoritatem requiris, ex octaua. Ob idq; angulus A, angulo D ęqualis, Quod erat faciendũ.

HOC ETIAM ex Recto perficiemus. Sit enim linea data A B, datumq; in ea punctum C: datus verò angulus D E F. Volo ad punctum C statuere angulum angulo D E F æqualem.

Produco F E in G punctum: Ac super punctum E erigo, per vndecimam, ad rectos angulos lineam E H: Quæ si congruat cum E D linea: erat datus angulus, rectus: Quapropter erecta perpendiculari super C punctũ, habebimus quęsitum. Sin aliter, excitabo perpendicularem ad punctum H: cum qua coïbit, per quartam Petitionem, linea E D ducta. Est enim angulus D E H minor



recto: quum G E H sit rectus. Concurrant igitur in puncto D, vt fiat Triangulum D E H. Eodem modo ergo super punctum C datum, perpendicularem C K,



quæ sit æqualis perpendiculari E H: simulq́, super punctum K, alteram perpendicularem K L, quæ sit æqualis perpendiculari H D: Et connecto G L. Dico itaq; angulum L C B æqualem esse angulo D E F dato.

Sunt enim duo H E D & K C L Triangula, per quartam, inter se æqualia & æquilatera: & duo anguli L C K & D E H æquales. Atqui duo B C K & F E H anguli sunt æquales, vterque enim rectus. Quare, per secundam Notionem, erit totus angulus L C B, toti angulo D E F æqualis, Quod erat constitutum.

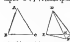
Quòd si perpendicularis extra angulum datum ceciderit, nempè si acutus fuerit: eadem erit probandi ratio, nisi quòd pro secunda, tertiam inducemus Notionem.

THEOREMA 15, PROPOSITIO XXIIII.

Si duo Triangula duo latera duobus lateribus mutuò æqualia habuerint, angulorum verò sub illis æquis lateribus contentorum alter fuerit altero maior: basis quoque maiorem respiciens angulum altera basi maior erit.

Sint duo Triangula A B C & D E F: sintq́, duo latera A B & A C, duobus D E & D F mutuò æqualia: scilicet A B æquale D E: & A C æquale D F: sed sit angulus A maior angulo D. Aio basin B C maiorem esse basi E F.

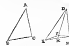
Ponam enim, secundùm doctrinam antecedentis, angulum E D G æqualem angulo A: Et, per secundam, D G lineam æqualem A C lineæ. Et connectam E G rectam: Quæ aut transibit supra E F, aut super eandem, aut infra. Et cadat primùm supra E F, vt secet ipsam D F in puncto H. Et manifestum est, ex quarta, Triangulum D E G æquale esse & æquilaterū Triangulo A B G.



Quoniam itaq, Trianguli D F G duo latera D F & D G sunt æqualia: vtrunq, enim æquale A G: erunt, per quintam, duo anguli D F G & D G F super basin, æquales. Quapropter maior erit angulus D F G angulo F G E: ob idq; multò maior angulus totus E F G ipso F G E. Maius itaque, per decimamnonam, latus E G latere E F. Quare, quum E G sit æquale B C: maior est B G basis, ipsa E F basi, Quod fuit demonstrandum.

ITEM ALITER. Maior est angulus H F G, vt iam ostendimus, ipso F G H. Maius est igitur, per decimamnonam, G H latus ipso F H latere. Atqui E H & H F, per vigesimam, sunt maiora E F. Quare multò maiora sunt E H & H G (id est E G) ipso E F. Igitur & A C maius ipso E F, Quod fuit ostendendum.

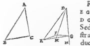
Si verò E G transeat super E F: tum E F erit pars ipsius: Vnde E G maior erit.



Transeat iam E G infra E F: duæq́, D F & D G, quæ positæ sunt æquales, protrahantur ad H & K puncta, vt D F secet E G in puncto K. Eruntq́, per secundam partem quintæ, duo anguli sub basi F G H & G F K inter se æquales. Maior itaq, erit angulus G F K angulo E G F: ob idq́, multò maior E F G ipso E G F. Quare maius est, per decimamnonā, latus E G (idem & B C) latere E F, Quod erat demonstrandum.

ALITER. Quum duo anguli F G H & G F K sint æquales: erit maior G F K ipso F G K. Maius itaque per decimamnonam, latus K G, latere F K. Sed E K & F K, per vigesimam, sunt maiora E F. Quare multò maiora sunt E K & K G (id est E G) ipso E F, Quod erat ostendendum.

RVRS

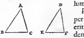


RVRSVS ex vigesimaprima. Duo latera D G & E G sunt maiora duobus D F & E F. Quare quum D G posita sit æqualis D F: superent F G maior E F. Sed vt hic admonet Campanus, præstat prior demonstrandi ratio: vt ex vtraque parte quintæ Propositionis ducatur argumentatio. Iucunda tamen illa varietas ingenium acuit, & memoriam exercet.

THEOREMA 16, PROPOSITIO XXV.

Si duo Triangula, duo latera duobus lateribus mutuò æqualia habuerint, basis verò vnius basi alterius fuerit maior: angulus quoque maiori basi oppositus, maior erit angulo minori basi opposito.

Sint duo Triangula A B C & D E F: sintq; duo latera A B & A C, duobus lateribus D E & D F mutuò æqualia: sed basis B C maior basi E F. Dico angulum A maiorem angulo D. Hæc est Conuersa antecedẽtis.



Primùm itaq; æquales non erunt: Esset enim basis B C per quartam, basi E F æqualis, contra hypothesin. Neq; erit angulus A minor angulo D: Esset enim, per antecedentem, basis E F maior basi B C, contra hypothesin. Superest igitur vt A sit maior D, Quod fuit probandum.

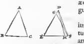
Manifestum quoque fuit hoc Theorema ex quarta, immò ex se ipso. Sed quia ex antecedentibus probationem recipit: cum cæteris in ordinem redactum est.

THEOREMA 17, PROPOSITIO XXVI.

Si duo Triangula, duos angulos duobus angulis mutuò æquales habuerint, latusq; vnum vni lateri æquale, siue quod æquis adiacet angulis, siue quod vni æqualium angulorum subtenditur: reliqua quoque latera reliquis lateribus mutuò æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

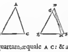
Sint duo Triangula A B C & D E F, sitq; angulus B æqualis angulo E, & angulus C angulo F: Et sit aut latus B C æquale lateri E F: aut A B æquale D E: aut deniq; A C æquale D F. Aio reliqua duo latera, reliquis duobus esse lateribus æqualia: ac reliquum angulum A reliquo angulo D æqualem.

Primùm igitur sit latus B C, cui incumbunt duo anguli B & C, æquale lateri E F, cui incumbunt anguli E & F, positi æquales ipsis B & C. Dico latus A B æquale esse lateri D E: & latus A C, lateri D F: & angulum A, angulo D.



Nam si æquale non fuerit A B ipsi D E, sit D E maius: & rescindatur G E æquale ipsi A B: & connectatur F G. Eritq;, per quartam, angulus E F G æqualis angulo C: quapropter & angulo E F D, pars toti, quod est absurdum. Erit igitur D E æquale ipsi A B: ob idq;, per eandem, D F æquale A C: & angulus D, angulo A, sicut voluimus.

Sint rursus duo anguli B & C æquales duobus E & F: sitq; latus A B quod subtẽditur angulo C, æquale lateri D E quod subtẽditur angulo F, cui positus est æqualis angulus C. Aio latus B C æquale esse lateri E F: & latus A C, lateri D F: & angulũ A, angulo D.

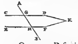


Si enim B C & E F latera non fuerint æqualia, sit E F maius: & ponatur E H æquale B C: & connectatur D H. Eritq́,,per quartam, angulus D H E æqualis angulo A C B: ob idq́, & angulo E F D, exterior interiori opposito, contra decimamsextam. Est igitur E F latus æquale B C lateri. Quaptopter & D F, per quartam, æquale A C: & angulus E D F, angulo A. Sicq́, patet propositio.

THEOREMA 18, PROPOSITIO XXVII.

Si duas rectas lineas recta linea secuerit, duosq́; interiores alternos angulos æquales fecerit: illæ duæ lineæ erunt paralleli.

Sit linea A B, secans duas lineas, C D quidem in puncto G, & E F in puncto H: sintq́; duo anguli alterni D G H & E H G, æquales. Dico duas lineas C D & E F esse parallelos seu æquidistantes.



Sin minus, concurrant protractæ ad punctum K, si fieri possit: vt sit Triangulum G K H. Cuius angulus K G H interior, erit ex positu, æqualis angulo E H G exteriori opposito, Quod in Triangulis fieri nequit, per decimamsextam. Non igitut concurrunt C D & E F lineæ. Quare, per Definitionem Parallelorum, ipsæ æquidistant altera alteri, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 19, PROPOSITIO XXVIII.

Si duas rectas lineas recta secans linea, exteriorem angulum interiori opposito & ex eadem parte æqualem fecerit, aut duos interiores ex eadem parte duobus rectis æquales: duæ lineæ erunt paralleli.

Sint duæ lineæ A B & C D, quas secet linea E F, illam quidem in puncto G, hanc verò in puncto H: sitq́, angulus G exterior angulo H interiori ex eadem parte æqualis: aut duo anguli H & G interiores ex eadem parte, duobus rectis æquales. Dico duas A B & C D lineas esse æquidistantes.

Quum enim E G B angulus, sit ex positu, æqualis D H G angulo: sitq́,, per decimamquintam, A G H eidem E G B æqualis: erunt A G H & D H G alterni, æquales. Quare, per antecedentē, duæ A B & C D lineæ æquidistabūt inter se, Quod est prius.



Sint porrò duo anguli A G H & C H G duobus rectis æquales. Dico sic quoque duas A B & C D inter se æquistare.

Quum enim duo anguli C H G & D H G, sint per decimamtertiam, duobus rectis æquales: si vtrinque auferatur C H G angulus: remanebunt, per communem Notionem, duo A G H & D H G alterni, æquales. Quare, per antecedentem, duæ A B & C D intet se æquidistabunt, Quod fuit demonstrandum.

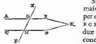
HVIVS Theotematis pars posterior connexa est cū Petitione vltima. Nam si duæ lineæ concurrere dicuntur, quæ cum linea ipsas secante duos angulos interiotes ex eadem parte duobus rectis minotes faciunt: conuerso modo, Quæ concurrunt, eæ duos angulos interiores ex eadem parte duobus tectis minotes efficient. Atqui A B & C D lineæ, duos eiusmodi angulos duobus tectis minores non efficiunt, immò æquales: Non concurrunt igitur. Quare Paralleli sunt.

THEO

THEOREMA 20, PROPOSITIO XXIX.

Si duas Parallelos recta secet linea: erunt duo anguli alterni æquales: & angulus exterior interiori sibi opposito ex eadem parte æqualis: itemq́; duo anguli interiores ex alterutra parte constituti, æquales duobus rectis.

Sint duæ A B & C D paralleli, quas secet linea E F in punctis G & H. Dico duos angulos B G H & C H G alternos, æquales esse: Angulum item G exteriorem angulo H interiori, ipsi ex eadem parte opposito, æqualem· Angulos denique G & H ex eadem parte interiores simul sumptos, æquales esse duobus rectis. Hæc est Conuersa duarum antecedentium: Cuius primum caput sic probatur.



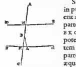
Si duo anguli B G H & C H G non sint æquales, sit maior ipse C H G. Et quoniam C H G & D H G sunt, per decimamtertiam, duobus rectis æquales: erunt duo B G H & D H G duobus rectis minores. Vnde fiet vt duæ lineæ A B & C D in alterutram partem productæ concurrant, vt ad punctum K: Quod erit contra hypothesin, quum sint paralleli. Sunt igitur anguli B G H & C H G æquales.

Ad hoc consequitur secundum. Est enim, per decimamquintam, angulus A G E æqualis angulo B G H: vnde & ipsi C H G, per communem Notionem, æqualis, exterior interiori.

Hinc rursus colligitur tertium. Nam quum A G E & A G H, sint per decimamtertiam, æquales duobus rectis: erunt quoq;, per animi Notionẽ, C H G & A G H æquales duobus rectis: ambo interiores & ex eadem parte, Quod erat demonstrandum.

Si duæ rectæ lineæ quæ duas parallelos secant, inter ipsas ad vnum punctum coierint, duosq́; angulos alternos æquales fecerint: aut angulum exteriorem interiori sibi opposito ex eadem parte æqualem: aut denique duos interiores ex alterutra parte duobus rectis æquales: eæ duæ lineæ in continuum erunt & linea vna.

Sint duæ lineæ A B & C B, quæ duas parallelos D E & F G secent: A B quidem ipsam D E in puncto H: & C B ipsam F G in puncto K: Sitq́; angulus D H B æqualis angulo B K G: aut angulus A H D æqualis angulo B K F: aut deniq, B H D & B K F æquales sint duobus rectis. Dico duas A B & C B esse in continuum & lineam vnam.



Si enim non sint eiusmodi: protrahatur A B, vt secet F G in puncto L, & sit A L linea vna: sitq́; Triangulum B L K. Et erit angulus D H B æqualis angulo G L B alterno, per primam partem huius vigesimænonæ: Quapropter G L B æqualis B K G interiori & opposito: Quod in Triangulis fieri non potest, per decimamsextam. Insuper erit per secundam partem huiusce, angulus A H D æqualis angulo B L K, ex eadem parte exterior interiori. Sed idem A H D ipsi B K F ponitur æqualis. Erit igitur B K F ipsi B L K æqualis: Quod per eandem decimamsextam fieri non potest.

Postremò, quum A H D & B K F ponantur duobus rectis æquales: sintq́; A H D & B L K duobus rectis æquales, per vltimam partem huius vigesimænonæ: erit B K F æqualis ipsi B L K, repugnante eadem decimasexta.

THEOREMA 21, PROPOSITIO XXX.

Quæ eidem ſunt æquidiſtantes, eæ quoque inter ſe ſunt æquidiſtantes.

Sint duæ A B & C D æquidiſtantes ipſi E F lineæ. Dico & ambas inter ſe æquidiſtare.



Ponam G H lineam, ſecantem tres lineas A B, E F & C D in punctis K, L, M. Et quoniam A B æquidiſtat E F: erunt anguli alterni B K L & E L K, per primum caput antecedentis, inter ſe æquales. Itidem, quia C D æquidiſtat E F: erit E L K, per ſecundum caput eiuſdem, æqualis C M L, exterior interiori. Angulus igitur B K L angulo C M L, per animi Notionem, æqualis. Qui quum ſint alterni, erunt per vigeſimamſeptimam Propoſitionem, duæ A B & C D æquidiſtantes, Quod erat demonſtrandum.

POTERAT euidentiſſimè demonſtrari ex Recto. Scilicet in A B rectam dimitto, per vndecimam, G H perpendicularem, quæ ipſam A B ſecet in puncto H: quam G H continuabo donec ſecet lineam E F in puncto K: & indè vſque ad C D, vt ſecet ipſam in puncto L.

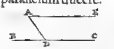


Iam quum G L ſit linea vna, comparatis viciſſim duobus A B & C D cum E F, adductaq; in probationem vigeſimaſeptima, ſeu vigeſimaoctaua: ſatis conſtat, per definitionem perpendicularis & per decimamquintam Propoſitionem, omnes angulos qui ad H, K, L, eſſe rectos: ac propterea æquales. Quare per antecedentem, duæ A B & C D paralleli, Quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA 10, PROPOSITIO XXXI.

Per punctum extra lineam rectam ſignatum, ipſi lineæ parallelum ducere.

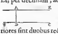
Sit punctum A extra lineam B C ſignatum. Volo per A punctum, ipſi B C lineæ parallelum ducere.



Duco lineam A D, ſecantem B C in puncto fortuito D: quę cum ipſa faciat angulos A D B & A D C: Et conſtituo in puncto A, per vigeſimamtertiam, angulum D A E æqualem angulo A D B alterno. Ac tum erit A E ipſi B C parallelus, per priorem partem vigeſimæ octauæ, Quod erat faciendum.

HÆC ETIAM poterat Perpendicularis officio abſolui.

A puncto enim A duco, per vndecimam, ad rectam B C, perpendicularem A D: Et, per decimam, ad ipſam A D ſuper punctum A erigo perpendicularem A E. Ac tum manifeſtum eſt, per cõuerſam rationem Petitionis vltimæ, duas lineas A E & B C non concurrere: quum neutra inclinet in alteram: hoc eſt, quum ex neutra parte duo anguli interiores ſint duobus rectis minores. Neque maiori probatione indiget hæc aſſertio quàm ipſa Petitio.



Hæc ideò annotaui quòd lineæ Paralleli, ius Recti & Æqualis præcipuo quodam officio conſeruent. Quò fit vt Propoſitiones quæ Parallelorum mentionem hactenus fecerunt, vſum habeant in Geometricis Demonſtrationibus frequentiſſimum.

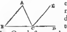
THEO

THEOREMA 22, PROPOSITIO XXXII.

Angulus exterior Trianguli, duobus interioribus sibi oppositis est æqualis: Et cuiuslibet Trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales.

Sit Triangulum ABC: Cuius latus BC producatur ad punctum D. Dico angulum ACD exteriorem, duobus A & B interioribus simul sumptis esse æqualem: Et tres angulos intimos ipsius Trianguli simul sumptos, duobus rectis esse æquales.

A puncto C ducam, per antecedentem, lineam CE parallelum lateri BA. Tum erunt anguli ECA & BAC, per primam partem vigesimænonæ, æquales, vtpotè alterni: & per secundam partem eiusdem, anguli ABC & ECD æquales, exterior interiori. Quare totus ACD exterior, ambobus A & B interioribus est æqualis, Quod est prius. Atque eadem erit probatio reliquorum angulorum extrà sumptorum.



Quum itaq; duo anguli ACB & ACD sint, per decimamtertiam, æquales duobus rectis: erunt tres anguli ABC, BAC, & ACB, æquales duobus rectis, Quod fuit demonstrandum.

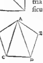
Appendix ex Campano.

Ex hac consequitur, Cuiuslibet Figuræ Multilateræ omnes angulos simul sumptos bis tot rectis angulis esse æquales, quota est ipsa Figura in ordine Multilaterarum.

Verbi gratia, Trigonum est Figurarum prima, quum nulla sit pauciorum laterum: duæ enim lineæ superficiem non concludunt. Trigonum itaque duos complectitur angulos rectos. Vnitas enim quæ ordinem Trigoni notat, bis sumpta facit binarium. Tetrapleuron, seu Quadrilaterum, quod in ordine est secundum, quatuor includit angulos rectos: Binarius enim duplicatus quaternarium efficit. Ordo autem Figurarum è lateribus colligitur. Nam si duo semper latera sustuleris: numerus laterum residuus, ordinem Figuræ ostendet. Vt si quæratur Hexagona quota sit Figurarum: à senario aufer binarium, ac supererit quaternarius. Est itaque Hexagona ordine inter Figuras quarta. Quare octo angulos rectos continet. In summa, vt etiam addamus ad Campanum, quum Triangulum sit Figura prima: vt ordinem cæterarum cognoscamus, initium numerationis faciemus à ternario: vt quaternarius sit pro binario, quinarius pro ternario: sicq; ordinatim.



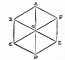
HÆC AVTEM rectorum angulorum consideratio inde prompta est, quòd omnis multilatera Figura in tot Triangula resoluitur, quota ipsa fuerit à prima. Quadrilatera enim in duo, Pentagona in tria, Hexagona in quatuor Triangula resoluitur: sicq; continenter: sicut ex adscriptis Figuris cernere est.



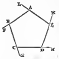
Verbi causa, In Pentagono ABCDE, quum quodlibet trium Triangulorum in quæ resoluitur, duos rectos angulos includat: ipsum Pentagonum sex rectos includet angulos. In idem etiam recidet si dicamus, In omni Figura multilatera omnes angulos simul sumptos tot rectis æquari angulis, quot significantur per numerum angulorum duplicatum, demptis quatuor.

A pun

A puncto enim fortuito intra Figurã signato, quale hic in Hexagono A B C D E F, punctum G, si ducantur lineæ recte ad quenlibet angulorum: erunt in ipsa Figura tot Triangula comprehensa, quot anguli in ipsa fuerint. Horum itaque Triangulorum omnes anguli simul sumpti tot rectis angulis æquantur, per hanc Trigesimamsecundam, quot sunt anguli totius Figuræ duplicati: vt hic sex Triangulorum, sunt anguli duodecim recti. Quumq; omnes anguli punctum G circunstantes, sint ex decimatertia, quatuor rectis æquales: si quatuor ex duodecim auferamus, supererunt in Hexagono sex anguli octo rectis æquales.



HINC etiam manifestum est, Figuræ Polygonæ angulos exteriores omnes simul sumptos quatuor rectis æquales esse. Sunt enim interiores cum exterioribus bis tot rectis æquales, quot in Figura anguli fuerint, per decimamtertiam. Interiores autem bis tot rectis sunt æquales, quot ipsa Figura habuerit angulos, demptis quatuor, vt modò ostendimus: quapropter exteriores semper quatuor rectis æquales. Exempli gratia, protrahantur quinque latera Pentagoni A B C D E, ad puncta F, G, H, K, L. Eruntq;, per decimamtertiam, duo anguli qui ad A, æquales duobus rectis: ac per eandem, duo anguli qui ad B, æquales duobus rectis. Sicq; binos quosq; angulos sumendo, ij omnino decem rectis æquabuntur. Demptis itaq; interioribus, qui sex rectis æquantur, vt modò probauimus: erunt exteriores quatuor rectis æquales.



CONSTAT etiam, in omni Pentagono sic constructo vt quodlibet latus duo secet ex reliquis, quinque angulos duobus rectis esse æquales. Sit enim quale proponitur Pentagonum A B C D E, vt scilicet A C latus secet latus B E in puncto G: & latus A D secet idem B E in puncto F. Eritq;, per præsentem, angulus A F G æqualis duobus angulis B & D, Trianguli B D F: exterior interioribus oppositis. Eadem ratione angulus F G A, duobus angulis C & E, Trianguli C E G, erit æqualis. Atqui duo anguli A F G & F G A cum angulo A, per hanc ipsam, sunt æquales duobus rectis. Sunt igitur quatuor anguli B, C, D, E cum angulo A æquales duobus rectis, Quod erat demonstrandum.



Hæc Campani commentationes quanuis non indignæ cognitu videantur. tamen eius generis inuenta si conquirantur, in immensum excrescere possent. Figuræ enim Geometricæ tam latum spatiandi campum ingenijs quàm Numeri, immò adeò latiorem, exhibent.

EX HOC etiam Theoremate intueri licet, Trianguli constructionem ex duabus lineis super tertiam ad rectos angulos erectis, perfici. Si enim altera in alteram inclinetur: ambæ cum tertia sic includent superficiem Triangulam, vt quod duobus rectis angulis deperit, id in tertio angulo recuperetur. Vt si intelligantur duæ lineæ A B & C D ad rectos angulos super lineam B D erectæ, moueri altera alteram versùs, & coire ad punctum E, vt fiat Triangulum B D E: quod duobus rectis angulis A B D & C D B decrescit, id tertius angulus E sibi assumit, vt Superficies exurgat. Sic res humanæ comparatæ, vt aliæ in alias cadentes tot specierum varietates componant. Sed nos ad institutum reuertamur, aliàs de ijs lusuri.



THEOREMA 23, PROPOSITIO XXXIII.

Si duæ rectæ lineæ duas æquales & æquidistantes lineas

ex ad

ex aduerſo connectant: erunt & ipſæ inter ſe æquales & æquidiſtantes.

Sint duæ lineæ AB & CD, quæ duas AC & BD æquales & æquidiſtantes connectant ex aduerſo in quatuor punctis A, B, C, D. Dico duas AB & CD eſſe æquales inter ſe & æquidiſtantes.



Connectam enim AD. Et quia AC & BD ſunt æquales & æquidiſtantes: erit angulus CAD, per primam partem vigeſimænonæ, angulo ADB æqualis. Itaque quum duo latera AC & AD, Trianguli ACD: ſint æqualia duobus lateribus BD & DA, Trianguli BAD: erit, per quartam, baſis AB æqualis baſi CD, Quod eſt prius.

Erunt & per eandem, duo anguli ADC & BAD inter ſe æquales. Quare quum ſint alterni, æquidiſtabit, per vigeſimamſeptimam, AB ipſi CD, Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 24, PROPOSITIO XXXIIII.

In omni Parallelogrammo, latera ex aduerſo poſita, ſunt æqualia, & anguli oppoſiti æquales: Et Dimetiens medium Parallelogrammum diuidit.

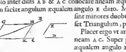
Sit Parallelogrammum ABCD, cuius Dimetiens AD. Dico duo latera AB & CD inter ſe eſſe æqualia: duoq́; AC & CB inter ſe: Duos item angulos A & D inter ſe æquales, duosq́; B & C inter ſe. Totam denique Superficiem à Dimetiente AD, mediam diuidi.



Quum enim AB & CD ſint æquidiſtantes: duo alterni anguli BAD & CDA erunt, per vigeſimamnonã, æquales. Quumq́; AC & BD itidem ſint æquidiſtantes: erunt & duo alterni CAD & BDA æquales, per eandem. Quum itaque duo Triangula ABD & ACD, habeant duos angulos duobus angulis mutuò æquales, ſcilicet BAD & BDA, ipſis CDA & CAD: & latus AD, cui incumbunt anguli, vtrique Triangulo commune: erit, per vigeſimamſextam, latus AB lateri CD æquale: latusq́; AC lateri BD: & angulus B angulo C æqualis: ob idq́; totum Triangulum ABD, toti Triangulo ACD æquale. Quare Theorema omni ex parte conſtat.

Inter duas lineas interminatas ad angulum datum coniunctas, lineam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum alteri angulo dato æqualem. Oportet autem duos angulos datos duobus rectis eſſe minores.

Sint duæ lineæ AB & AC, conſtituentes angulum datum BAC, ſed quæ ſint interminatæ ex parte extenſionis earum: ſitq́; linea data, D: angulusq́, alter datus, E. Volo inter duas AB & AC collocare lineam æqualem lineæ D, quæ cum altera illarum faciat angulum æqualem angulo E dato. Modò tamen duo anguli A & E ſint minores duobus rectis. Alioqui fieri non poſſet Triangulum, per decimamſeptimam.



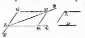
Placet ergo vt angulus conſtituendus ſit ſuper lineam AC. Super puncto A facio angulum CAF æqualem angulo E dato, per vigeſimamtertiã Propoſitionem: & ex altera parte produco FA ad punctum G, ſic vt AG ſit æqualis lineæ D datæ, per ſecundam: Et per punctum G duco, per trigeſimamprimam, GH parallelum ipſi AC: quam produco couſque vt concurrat, ſiue ſecet AB in puncto H: itidemq́, per punctum H, duco HK parallelum ipſi GF, quæ ſecet lineã AC

in

in puncto K. Dico iam lineam HK constitutam inter duas AB & AC, esse æqualem lineæ D, & angulum K esse æqualem angulo E dato.

Quoniam enim ex constructione, AGHK est Parallelogrammum, erit KH æqualis AG, per trigesimamquartam Propositionem: quapropter & ipsi D lineæ æqualis, Quod est prius.

Et quoniam AK in duas parallelos FG & KH incidit: erit angulus AKH æqualis angulo FAK, per primam partem vigesimænonæ: quum sint alterni: quapropter & idem K angulus, ipsi E angulo dato æqualis. Linea igitur HK inter duas AB & AC collocata, & lineæ D æqualis, facit angulum K æqualem angulo E dato, Quod erat constitutum.



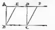
HOC Problema hic apponere visum est, aliquando mihi propositum ab artifice quodam Geometriæ non imperito: quod difficilem probationem videretur habere: Tria enim dantur vt Triangulum construatur: duo anguli, & linea vna: præsertim quum vterque angulus datus, non fit super eadem linea constituendus: sic enim factus esset constructio. Vt si super linea AK constituendum Triangulum proponeretur, habens duos angulos duobus angulis datis æquales. Hic verò AK linea, arte conquiritur.

THEOREMA 25, PROPOSITIO XXXV.

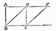
Quæ super eandem basin Parallelogramma & inter easdem parallelos consistunt, inter se sunt æqualia.

Sint duo Parallelogramma ABCD & EBCF, super eandem basin BC, & inter easdem parallelos AF & BC. Dico esse inuicem æqualia.

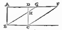
Aut enim linea BE secabit lineam AF citra punctum D, aut in ipso puncto D, aut vltra. Secet igitur primum citra D punctum. Et quia vtraque duarum linearum AD & EF, est æqualis lineæ BC: erunt & ambæ inter se æquales. Dempta igitur ED communi, remanebit AE æqualis DF. Rursus quia, per eandem, AB est æqualis CD: & angulus EAB, per secundam partem vigesimænonæ, æqualis angulo CDF interior exterior: erunt, per quartam, duo Triangula EBA & FCD inter se æqualia. Quare addita vtrique Figuræ anormi CDEB, erunt duo Parallelogramma ABCD & EBCF æqualia.



Nunc autem secet linea BE lineam AF in ipso puncto D: eruntq́, iisdem rationibus, duo Triangula ABD & DCF æqualia. Quare addito vtrique BCD Triangulo, fient duo Parallelogramma ABCD & DBCF æqualia. Sed & per trigesimamquartam probabitur sic. Duo Triangula ABD & BCD sunt æqualia, ratione Dimetientis, per trigesimamquartam: itemq́, duo Triangula CDF & BDC æqualia, ob eandem rationem. Duo igitur Triangula ABD & CDF, sunt per communem Notionem, æqualia. Quare vtrique addito Triangulo BCD, fient duo Parallelogramma ABCD & DBCF æqualia.



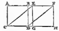
Secet demùm linea FE lineam AF præter D punctum in G: vt intersecet lineam CD in puncto H. Quia igitur duæ lineæ AD & GF sunt æquales, per antecedentem & communem Notionem: addita vtrique particula DG, erunt duæ AG & EF æquales: & Triangulum ABG Triangulo DCF æquale: quia vtriusque latera sunt mutuò æqualia, & anguli mutuò æquales, per antecedentem, & per vigesimamnonam. Vtrique ergo addito BCH Triangulo, & ablato DGH ab ijsdē: erūt duo ABCD & GBCF Parallelogrāma æqualia, Quod erat demonstrandum.



THEOREMA 26, PROPOSITIO XXXVI.

Quæ ſuper æquales baſes Parallelogramma, & inter eaſdem parallelos conſiſtunt, inter ſe ſunt æqualia.

Sint duo Parallelogramma ABCD & EFGH, ſuper æquales baſes CD & GH, & inter duas parallelos AF & CH. Dico hæc duo Parallelogramma eſſe æqualia.

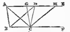


Ducam duas lineas CE & DF. Eritq́; per trigeſimamtertiam, ſuperficies CDEF æquidiſtantium laterum. Duæ enim æquidiſtantes CD & EF inter ſe ſunt æquales: quum vtraque ſit æqualis GH, & connectantur duabus CE & DF ex oppoſitis partibus. Quia ergò, per antecedentem, vtrunque duorum Parallelogrammorum ABCD & EFGH, eſt æquale Parallelogrammo CDEF (hinc EF baſi, illinc CD intellecta): ipſa erunt, per animi Notionem, æqualia, Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA 27, PROPOSITIO XXXVII.

Triangula ſuper eandem baſin & inter eaſdem parallelos, ſunt æqualia.

Sint duo Triangula ABC & DBC, ſuper eandem baſin BC, & inter duas parallelos AE & BF conſtituta. Hæc dico eſſe æqualia.

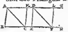


Duco, per trigeſimamprimam, CG æquidiſtantem AB: & CH æquidiſtantem BD. Eruntq́; duo Parallelogrãma ABCG & DBCH æqualia: ob id, & eorum dimidia. Quare quum ABC Triangulum ſit dimidium Parallelogrammi ABCG, per trigeſimamquartã: & DBC Triangulum ſit dimidium Parallelogrammi DBCH, per eandem: ipſa Triangula inter ſe erunt æqualia, Quod fuit demonſtrandum.

THEOREMA 28, PROPOSITIO XXXVIII.

Triangula ſuper æquales baſes & inter eaſdem parallelos conſtituta, ſunt æqualia.

Sint duo Triangula ABC & DEF, ſuper baſes BC & EF æquales & inter duas parallelos AG & BH. Hæc dico eſſe æqualia.



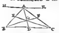
Ducam CK æquidiſtantem AB: & FL æquidiſtantem ED. Eruntq́; per trigeſimamſextam, duo Parallelogramma ABCK & DEFL æqualia: ob idq́; ABC & DEF Triangula, eorum dimidia, per trigeſimamquartam, æqualia, Quod erat oſtendendum.

Ex hac facillimè elicitur hoc Problema,

Datum Triangulum in duo Triangula æqualia partiri.

Sit enim Triangulum ABC, diuidendum in duo æqualia.

Diuido vnum laterum, & ſit ipſum BC, in duo æqualia, per decimam, in puncto D: & connecto DA. Dico duo Triangula ABD & ACD eſſe æqualia. Quod ſatis



manifeſtum eſt ex hac trigeſimaoctaua: ſi intellexerimus parallelam ipſi BC ductam per punctum A, vt docet trigeſimaprima: qualis hoc loco, ad euidentiam, poſita eſt HK. Duo etiam latera AB & AC æqualiter diuiſimus in punctis E & F: vt intelligas cuiuſcunque laterum ſectio fiat, totum Triangulum per æqualia diuidi. Vbi Triangulorum quoque minorum æqualitas agnoſcitur, ex tribus li-

d neis

neis A D, B F, & C E se scindentibus in puncto G. Hoc facit ad diuidenda Triangula in pariter paria: vt in 4, 8, 16, 32.

Mechanicè verò diuidetur Triangulũ in alias partes, diuiso similiter latere ductisq́, lineis ab angulo opposito ad pũcta sectionũ. Cuius diuisionis ostensio ad Sextum librum reseruatur.

Subijciemus & hoc Problema,

A puncto in vno laterum Trianguli signato lineam ducere, quæ Triangulum bifariam diuidat.

Sit punctum A signatum in latere B C Trianguli B C D. Volo à puncto A ducere lineam quæ diuidat Triangulum B C D in duas partes æquales.

Diuido latus B C bipartitò in puncto E. Tum à puncto A duco ad angulum D oppositum, lineam A D. Cur per punctum E, duco E F parallelum, per trigesimam, quæ secet latus D C in puncto F. Et connecto A F. Dico A F esse quæ diuidit Triangulum B C D in duo æqualia: Scilicet A B D F Quadrilaterum, æquale esse A C F Triangulo.



Connecto E D, secantem A F in puncto G. Et constat ex trigesimaoctaua, duo Triangula B E D & C E D esse æqualia, intellecta parallelo ipsi B C, ductâ per punctum D: quum sint super æquales bases E B & E C. Duo quoque Triangula D E F & A E F sunt æqualia, per trigesimamseptimam: quum sint super eandem basin E F, & inter duas parallelos A D & E F. Dempto itaque communi E F G, erit Triangulum A E G æquale Triangulo D F G: Vtrique igitur ipsorum addito Trapezio C F G E, erit A C F Triangulum æquale D E C Triangulo. Atqui D E C est dimidia pars totius Trianguli B C D: quapropter & A C F est dimidia pars eiusdem. Reliqua itaque pars dimidia, erit A B F D Trapezium. Quare linea A F diuidit totum A C D Triangulum æqualiter, Quod facere oportuit.

THEOREMA 29, PROPOSITIO XXXIX.

Triangula æqualia super eandem basin. & ad eandem partem erecta, inter duas consistunt parallelos.

Triangula super eandem basin ad eandem partem erecta, dicuntur quum linea ducta à vertice vnius ad verticem alterius, latera eorum non secat.

Sint duo Triangula A B C & D B C super basin B C, quæ verticem ad eandem partem habeant, Et connectatur A D. Dico A D lineam esse parallelum basi B C.

Sin aliter: ducatur parallelus ipsi B C, per trigesimamprimam: quæ aut transibit supra A D, aut infra eandem. Si suprà, sit ipsa A E: & producatur B D, quousque concurrat cum A E in puncto E: connectaturq́, E C. Quoniam itaque, per trigesimamseptimam, Triangulum A B C est æquale Triangulo E B C, vtrunq, enim inter duas parallelos: & eidem Triangulo A B C positum est æquale Triangulum D B C: erit & idem D B C æquale ipsi E B C, pars toti, Quod esse non potest.



Si verò parallelus duci possit infra A D, vt A F: connexa F C, fiet Triangulum F B C æquale ipsi D B C, pars toti. Non igitur erit alia parallelus basi B C, quàm ipsa A D, Quod erat ostendendum.

Appendix ex Campano.

Ex hac & antecedente consequitur,

Si linea recta duo Triangulis latera per æqualia secuerit: ipsa erit tertio lateri æquidistans.

Sit

Sit enim Triangulum ABC: & sit linea DE quæ diuidat duo latera AB & AC per duo æqualia in punctis D & E. Hanc dico esse parallelum ipsi AC.



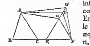
In Quadrilatero ACED ducantur duæ transuersæ AE & CD. Intellectaq́; per punctum E, parallelo ipsi AB: erit, per trigesimamoctauam, Triangulum BDE æquale Triangulo DAE: quum duæ ipsorum bases AD & DB, positæ sint æquales. Rursus intellecta per punctum D, parallelo ipsi BC: erit idem Triangulum BDE æquale Triangulo CED. Erunt itaque, per animi Notionem, duo Triangula EAD & ECD æqualia. Quæ quum super eandem sint basin DE, & in eandem partem erecta: erunt, per hanc trigesimamnonam, inter duas parallelos DE & AC, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 30, PROPOSITIO XL.

Triangula æqualia super æquales bases, & in eandem partem erecta, inter duas consistunt parallelos.

Sint duo Triangula ABC & DEF æqualia, super duas bases BC & EF æquales, & in eandem partem erecta: & connectatur AD. Dico duo Triangula ABC & DEF inter duas parallelos BF & AD consistere. Hæc est Conuersa trigesimæoctauæ.

Nam si AD non est ipsi BF parallelus: alia parallelus ducta transibit supra aut infra AD. Si supra, sit ipsa AG: & producatur ED ad concursum AG, in punctum G: connectaturq́; GF. Eritq́; per trigesimamoctauam, Triangulum GEF æquale Triangulo ABC. At DEF positum est ipsi ABC æquale. Erit igitur & DEF ipsi GEF æquale, pars toti, quod est absurdum.

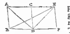


Si verò infra AD transeat, sit ipsa AH: & connectatur HF. Ac tum eadem argumentatione probabitur Triangulum HEF, Triangulo DEF esse æquale, pars toti. Quare quum neutra ratione fieri possit: erunt BF & AD paralleli, Quod erat ostendendum.

THEOREMA 31, PROPOSITIO XLI.

Si Parallelogrammum Triangulumq́; super eandem basin, & inter duas parallelos consistant; Parallelogrammum Triangulo duplum erit.

Sit Parallelogrammum ABCD, & Triangulum BDE, super eandem basin BD, & inter AE & BD parallelos. Dico Parallelogrammum ABCD esse duplum Trianguli BDE.



In Parallelogrammo ducam Dimetientem AD: Eritq́;, per trigesimamseptimam, Triangulum ABD æquale Triangulo EBD. Sed Parallelogrammum ABCD, per trigesimamquartam, duplum est Trianguli ABD: Quare & duplum Trianguli EBD, Quod erat ostendendum.

Ex hoc satis constat, Si duplicetur basis, Triangulum super hanc erectum, æquale esse ipsi Parallelogrammo, Quale hoc loco est BEF Triangulum.

Probabitur & hoc facilè quod subiecimus Theorema,

Si parallelogrammum Triangulumq́; super æquales bases & inter duas parallelos consistant: Parallelogrammum Triangulo duplum erit.



Sit enim Parallelogrammum A B C D, & Triangulum E C F, ſuper æquales baſes B C & C F. Dico A B C D Parallelogrammum eſſe duplum Triangulo E C F.

Connectatur E D: & ducatur per punctum C, parallelus ipſi B F, ſi C D parallelus non fuerit. Ac tum, ex trigeſimaſexta, & trigeſimaquarta, conſtabit Propoſitio.

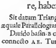
Hanc verò Euclides rectè prætermiſit ob facilitatem. Sed & nonnullas ſimilis notionis quas anteà expreſſit, poterat omittere.

PROBLEMA II, PROPOSITIO XLII.

Dato Triangulo æquale Parallelogrammum conſtituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit datum Triangulum A B C, datus verò angulus D. Volo ipſi Triangulo A B C æquale Parallelogrammum conſtituere, habens angulum æqualem angulo D.

Diuido baſin B C in duo æqualia, per decimam Propoſitionem, in puncto E: & connecto A E. Tum per punctum A, duco A F parallelum ipſi B C, per trigeſimamprimam: & ſuper punctum E conſtituo, per vigeſimamtertiam, angulum G E C æqualem angulo D dato. Demùm ipſi E G, per punctum C, duco C F parallelum. Dico Parallelogrammũ E C F G eſſe æquale A B C Triangulo.



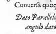
Quoniam enim, per trigeſimamoctauam, Triangulum A B E eſt æquale Triangulo A E C: erit totum Triangulum A B C duplum Trianguli A E C. At Parallelogrammum E C F G, per antecedentem, duplum eſt eiuſdem Trianguli A E C. Quare & ipſum E C F G Parallelogrammum, æquale eſt Triangulo A B C, habens angulum G E C æqualem angulo D, Quod erat faciendum.

Conuerſa quoque huius erit eiuſmodi,

Dato Parallelogrammo æquale Triangulum conſtituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit datum Parallelogrammum A B C D, datus verò angulus E. Volo ipſi A B C D Parallelogrammo conſtruere Triangulũ æquale, habens angulũ angulo E æqualem.

Super punctum C, per vigeſimamtertiam, conſtituo angulum D C F, æqualem angulo E: Et C F ſecet A B protractam, in puncto F. Itidem protraho C D, quæ eſt ipſi A F parallelus, ad punctum G: ita vt D G ſit æqualis ipſi C D. Ac demùm connecto F G. Dico Triangulum C F G eſſe æquale A B C D Parallelogrammo.



Quum enim, per trigeſimamoctauam, totum C F G Triangulum ſit duplum C D F Trianguli: & per quadrageſimamprimam, Parallelogrammum A B C D ſit eiuſdem C D F Trianguli duplum, erunt A B C D Parallelogrammum & C F G Triangulum inter ſe æqualia, Quod erat faciendum.

THEOREMA 32, PROPOSITIO XLIII.

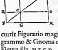
Duorum Parallelogrammorum circa Dimetientem maioris Parallelogrammi conſiſtentium, Supplementa ſunt æqualia.

Circa Dimetientem conſiſtunt Parallelogramma, quæ in Dimetiente maioris Parallelogrammi ſuam habent Dimetientem. Supplementa verò dicuntur quæ cum duobus

duobus Parallelogrammis maius Parallelogrammum perficiunt.

Sint itaque duo Parallelogramma ABCD & ECFG: quorum cuspides quæ ad C, sint in eodem puncto C sic coniunctæ ad decussationem, vt vtrunque Parallelogrammum per medium diuidatur, Dimetiente BF: sintq; ipsis annexa duo Supplementa HAEC & CDGK, perficienda totum Parallelogrammum BHFK. Dico HAEC & CDGK Supplementa esse æqualia.

Quum enim Dimetiens BF bipartitò diuidat totum Parallelogrammum BHFK per trigesimamquartam: erunt duo Triangula BFH & BFK æqualia. Quumq; eadem BF bipartitò diuidat ABCD Parallelogrammum, erunt & duo Triangula BCA & BCD æqualia. Atque eadem ratione duo Triangula CFE & CFG æqualia, Quare ablatis duobus Triangulis BCA & CFE à toto Triangulo BFH: itemq; ablatis duobus Triangulis BCD & CFG à toto BFK: remanebunt duæ Superficies HAEC & CDGK inter se æquales, Quod erat ostendendum.



In hac Propositione demonstranda, structuram ab aliis aliquantùm variaui: non nouitatis studio, sed vt totum negotium Supplementorum & integri Parallelogrammi euidentiùs exponerem. Vix enim vsquam in toto opere Geometrico occurrit Figuratio magis fœcunda quam hæc Gnomica: hoc est, quæ vno Parallelogrammo & Gnoma conflatur. Vt hoc loco, si ABCD Parallelogrammum sumamus, Figura illa HFCD, quæ cum ABCD perficit totum BHFK Parallelogrammum, Gnoma seu Gnomon vocatur. Si verò sumatur EFCG Parallelogrammum: erit Gnomon HBCG Figura. Nam hic Gnomonis explicandi locus est maximè oportunus: licet Euclides ad secundum librum distulerit.

Hanc ego Figuram mysticam soleo vocare: Ex ea enim, velut ex locupletissimo promptuario, innumerabiles exeunt Demonstrationes. Quod cum magna voluptate perspiciet qui in re Geometrica seriò se exercebit.

Cui verò magis placebit aliorum constructio, is primùm sibi deliniet BHFK Parallelogrammum: tum ducat ED parallelum: inde AG alteram parallelum: atque eam demonstrationem sequatur quam modò tradidimus.

Huius Conuersam sic instituemus.

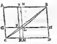
Si Parallelogrammum in duo Supplementa æqualia & duo quantacunq; Complementa diuisum fuerit: duorum Complementorum Dimetientes in continuum erunt, & vna totius Parallelogrammi Dimetiens.

Complementa hic vocauimus, duo Parallelogramma quæ cum duobus Supplementis totum Parallelogrammum constituunt. Sic enim ob vocum affinitatem non ineptè dici possunt: tum ne sine nomine essent, tum vt faciliùs caperentur, à Supplementis nominatim distincta.

Sit itaque Parallelogrammum ABCD, Cuius duo Supplementa æqualia, AEFG & FHDK: duo verò Complementa GFCK & EBFH, quorum Dimetientes CF & FB. Dico CFB esse lineam vnam, & totius ABCD Parallelogrammi Dimetientem.



Si enim non sit eiusmodi, erit alia totius Parallelogrammi Dimetiens: Sitq; ipsa CLB, infra Dimetientes CF & FB educta, secans GH in puncto L: Et per ipsum L punctum, ducatur MLN, per trigesimamprimam Propositionem, ipsi AC Parallelus: Sintq; in toto Parallelogrammo ABCD, duo Supplementa AMGL & LHND. Atque hec, per Directam huius, erunt inter se æqualia quum sint circa Dimetientem CLB: Sed AEFG Supplementum positum est æquale Supplemento FHDK. Quum itaque FHDK maius sit ipso LHDN: erit AEFG maius ipso AMGL,



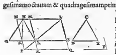
pars toto, quod est absurdum. Iisdem rationibus probabitur Dimetiens educi non posse supra Dimetientes C F & F B. Quare C F B vna est Dimetiens totius Parallelogrammi, Quod erat probandum.

PROBLEMA 12; PROPOSITIO XLIIII.

Super data recta linea, dato Triangulo æquale Parallelogrammum constituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit data linea A B, datumq; Triangulum C D E, datus verò angulus F. Volo super A B constituere Parallelogrammum æquale Triangulo C D E, habens anguľ equalem angulo F. Differt hæc à quadragesimasecunda: quòd hic data sit linea, illic nulla.

Produco itaque B A ad punctum G: & pono A G æqualem lateri D E, Trianguli, dati: Et per vigesimamtertiam, ad punctum A facio angulum G A H æqualem angulo E: Et per secundam, facio A H æqualem lateri E C. Connexaq; G H, erit Triangulum A G H, per quartam Propositionem, æquale Triangulo C D E dato. Diuido postmodùm A G per æqualia in puncto K, per decimam: & connecto H K. Et per punctum H, duco H L Parallelum ipsi G B, per trigesimamprimam. Inde ad punctum A constituo angulum G A M æqualem angulo F dato, per vigesimamtertiam, vt A M secet H L in puncto M. Tum per punctum K, duco K N Parallelum & æqualem ipsi A M. Et connexa H N, facio Parallelogrammum A K M N. Quod, per trigesimamoctauam & quadragesimamprimam, erit æquale Triangulo A G H, ob idq; Triangulo C D E dato. Cæterùm duco B L Parallelum ipsi A M: quam coniungo cum N M protracta, in puncto L. A quo educo Dimetientem L A: quam produco donec iungatur cum N K protracta, in puncto P. Et duco P Q Parallelū & equalem ipsi K B.



Ac demùm connexis A R & B Q, perficio totum Parallelogrammum N L P Q, constans quatuor Parallelogrammis. Inter quæ Supplementum A Q, per antecedentem, æquale est Supplemento A N: ob id & Triangulo dato C D E. Quare quum linea data A B sit vnum laterum ipsius A Q Parallelogrammi: & angulus B A R sit, per decimamquintā, angulo G A L æqualis: ob idq; angulo F dato: constat totum Problema.

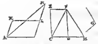
HANC Campani descriptionem apposuimus: vt ipsius tædiosam diligentiam, ac minimè necessariam ostenderemus. Nihil enim opus fuit Triangulo A G H. Tantùm fuit constituendum Parallelogrammum A K M N Triangulo C D E æquale, habens angulum æqualem angulo F, ex quadragesimasecunda: sicut rectè hîc Theon astruxit. Propositiones enim Geometricæ aliæ alijs præeunt: non vt ipsarum constructio, sed vsus tantùm repetatur: ne linearum multitudo intellectum conturbet potius quàm iuuet.

Huius autem Conuersa sic erit,

Super data recta linea, dato Parallelogrammo Triangulum æquale constituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit data linea A B, datumq; Parallelogrammum C D E F: datus verò angulus G. Volo super A B constituere Triangulum, ipsi C D E F Parallelogrammo æquale, habens angulum æqualem angulo G. Duco C H Dimetientem: & protracta C D ad H punctum, pono D H æqualem C D: Et connecto H F. Eritq; Triangulum C H F, per quadragesimamprimam, æquale Parallelogrammo C D E F: quum basis sit dupla.

Iam,



Iam, per directam huius, super A B constituo Parallelogrammum A B K L, æquale Triangulo C H F, habens angulum A B L æqualem angulo G dato. Tum protracta B L, pono L M æqualem B L: Ac demùm connecto A M. Dico iam Triangulum A B M, super A B esse constitutum quale voluimus.

Est enim Triangulum A B M æquale Parallelogrammo A B K L, per quadragesimamprimam: quum sint inter duas Parallelos B M & A K, sitq; dupla basis Trianguli. Sed A B L K, ex constructione, est æquale Triangulo C H F: & C H F æquale C D E F, per ipsam quadragesimamprimam. Quare, per animi Notionem, Triangulum A B M æquale est Parallelogrammo C D E F, habens angulum A B M, æqualem angulo G dato, Quod erat faciendum.

Poterat quoque in hæc verba proponi Problema,

Inter duas Parallelos interminatas, dato Rectilineo æquale Parallelogrammum constituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Vbi animaduertendum, inter duas parallelos datas Parallelogrammum constituere, non esse difficilius quàm super data recta linea. Nam vbicunque datur linea recta, datur ipsius Parallelus interminata intelligo, ad Parallelogrammum constituendum.

Hoc volui adijcere, vt Geometriæ candidati, Propositiones variè inuentas & enunciatas conciliare, & ad vsum accommodare discant.

HANC NOSTRAM poteramus in locum sequentis substituere, quum esset locupletior. Datur enim linea: præter id quòd sequens ipsa vacare videtur, vt quæ ex antecedente satis patêret: nisi fortè quòd Rectilinea in Triangula resoluere monet. Ob id, à nonnullis omissa est, vt à Campano. Eam tamen è loco non mouimus. Nihil enim in præsens de nostro in ordinem redigere constituimus.

PROBLEMA 13, PROPOSITIO XLV.

Dato Rectilineo æquale Parallelogrammum constituere, habens angulum angulo dato æqualem.

Sit datum Rectilineum A B C D, datus verò angulus E. Volo ipsi A B C D Rectilineo æquale Parallelogrammum construere, habens angulum æqualem angulo E.

Resoluo A B C D, quum sit Quadrilaterum, in duo Triangula A B D & B C D: Ipsiq, A B D, per quadragesimamsecundam, constituo æquale Parallelogrammum



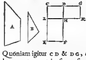
F G H K, habens angulum F K H, angulo E æqualem. Et continuata K H in punctum M, vt sit angulus G H M, per vigesimamnonam, æqualis angulo K: constituo super G H, per antecedentem, Parallelogrammum G H L M, æquale Triangulo B C D, habens angulum G H M iam creatum. Et quoniam linea K M, ex positu, est linea vna: & angulus M H G æqualis angulo F G H alterno, per primam partem vigesimænonæ: sed ipse M H G cum L G H duobus rectis æqualis, per vltimam partem eiusdem: erit F G H angulus cum ipso L G H, duobus rectis æqualis. Itaque, per decimamquartam, F L est linea vna. Quumq; F G & K H sint, per trigesimamtertiam, æquales: itemq, G L & H M, per eandem, æquales: erit tota F L, toti K M æqualis: & per trigesimamtertiam, F K & L M æquales. Est igitur totum Quadrilaterum F K L M, Parallelogrammum. Quare quum angulus K sit æqualis angulo E: constat Propositio.

Ex iam demonstratis emerget hoc Problema,

Propositis duabus Superficiebus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minorem cognoscere.

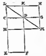
Sint duæ Superficies rectilineæ A & B, quarum maior sit A. Volo scire quantus sit excessus ipsius A supra B.

Constituo, per quadragesimamquartam, Parallelogrammum C D E F, æquale ipsi A Rectilineo, habens angulum C D E F, verbi gratia, rectum. Et protracta C D in G punctum, factaq; D G æquali ipsi C D: constituo, per quadragesimamquartam, super D G, Parallelogrammum D G H K, æquale ipsi B Rectilineo, habens angulum D G K rectum. Et protraho K H, donec secet C E in puncto L. Dico H L E F esse excessum Rectilinei A supra Rectilineum B.



Ac primùm C G K L vnum esse Parallelogrammum, clarius est quàm quod demonstrari debeat. Quóniam igitur C D & D G, ex posito, sunt æquales: & vtraque ipsi K L Parallelus: erunt, per trigesimamsextam, duo Parallelogramma C H & D K æqualia. Et quoniam D K positum est æquale ipsi B Rectilineo: erit & C H ipsi B Rectilineo, æquale. Quare, quum totum C F Parallelogrammum, sit æquale ipsi A Rectilineo sitq́, L F excessus ipsius C F supra D K: erit, per communem Notionem, L F excessus A Rectilinei Supra B Rectilineum, Quod erat manifestandum.

ALITER facilius. Maneat C D E F Parallelogrammum æquale ipsi A Rectilineo. Et protracta C D ad G punctum, constituatur super D G, Parallelogrammum D G H K ipsi B Rectilineo æquale: productisq́; E C & H K, vt concurrant ad L punctum, ducatur per D punctum, Dimetiens L D M, secans H G protractam, in puncto M. Et ducatur M N Parallelus ipsi H L, secans E L in puncto N: vt sit H L M N Parallelogrammum. Dico N F esse excessum Rectilinei A supra B Rectilineum.



Quum enim H D sit æquale B Rectilineo, sintq́; H D & D N Supplementa, per quadragesimamtertiam, æqualia: erit quoque D N ipsi B Rectilineo æquale. Quo ablato à C F Parallelogrammo (quod positum fuit ipsi A æquale) remanebit N F excessus A supra B, Quod erat faciendum.

PROBLEMA 14, PROPOSITIO XLVI.

Ex data recta linea Quadratum describere.

Sit data linea A B, ex qua sit describendum Quadratum.

A punctis A & B, excito, per vndecimam, duas perpendiculares A C & B D: quarum vtranque, per tertiam, facio æqualem ipsi A B. Eruntq́, per vltimam partem vigesimæoctauæ, A C & B D Paralleli. Et connecto C D: quæ per trigesimamtertiam, erit æqualis & Parallelus ipsi A B. Quumq́; duo anguli A & B sint recti: erunt & duo oppositi D & C recti, per vltimam partem vigesimænonæ: vel, si mauis, per trigesimamquartam. Quare, ex definitione Quadrati, erit A B C D Quadratum.



ALITER, Erigatur A C perpendicularis ad A B: eidemq́; ponatur æqualis. Et à puncto C ducatur C D parallelus & æqualis eidem A B: & connectatur D B: Quæ, per trigesimamtertiā, erit æqualis & Parallelus ipsi A C. Quumq́; per vltimam partem vigesimænonæ, omnes anguli siut recti: erit A B C D Quadratum, Quod faciendum fuit.

ANIMADVERTENDVM, veram Quadrati constructionem è Centro, atque ob id, è Circulo pendére. In ijs enim quæ perfecta sunt, punctum vbique primum est ad quod omnia referuntur. Sic igitur producemus Quadratum, non data linea.

Ex Centro A, Circuli BCDE, educãtur duæ lineæ AB & AC ad peripheriam, facientes angulum qui ad A rectum: & earum vtraque protrahatur in puncta D & E peripheriæ. Ac tum connectantur BC, CD, DE, & EB. Quum igitur quatuor anguli qui ad A sint recti, per decimãquintam & omnes lineæ æquales quæ illos comprehendunt, vtporè à centro ad peripheriam: erunt, per quintam & trigesimamsecundam, in quatuor Triangulis integrum Parallelogrammum componentibus, bini quique anguli, qui ad B, C, D, E, semirecti: vnde quatuor integri recti: & per quartam, quatuor bases æquales. Quare BCDE Quadratum.

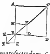


ATQVE eam ob causam præcipuam, tam mystica semper habita est Decussatio: ea præsertim quæ ad rectos fit angulos, & vndique æqualitatem ostendit: qualis in Quadrato & Circulo conspicua est. Nam quòd Quadratum facimus ex ductu lineæ rectæ in seipsam, id sensus iudicio facimus, Artis ductu. Per centrum enim lineas duci, atque in ambitum, non in latum incedere par est. Punctum quippe illud fœcundissimum, lineas infinitas circunquaque procreat. Neque quisquam mihi obijciat, Quadratos Numeros: qui ex ductu lateris in seipsum producuntur. Diuersa est enim Discretorum, & Continuorum consideratio, quam hîc explicandi non est locus. Hoc tamen non nego, Artem nobis omni ratione amplectendam esse: quæ Naturam sibi soli cognitam, patefacit similitudine & imitatione. Hæc enim quæ facit, affabrè quidem facit: sed quò perfectius, eò occultius.

ANIMADVERTE etiam, Quadrato quatuor inesse Semidiametros, Hexagono sex, Octagono octo: Trigono tres, Pentagono quinque, Heptagono septem, Ennagono nouem: sicq; Figuris continenter, pro angulorum numero. De Perfectis semper intelligo: scilicet de æquilateris & æquiangulis. Atque in paribus, Diametri terminantur ab angulo per centrum, ad angulum oppositum: in imparibus autem, imperfecta quadam ratione, ab angulo per centrum, ad latus oppositum. In Circulo vtrunque inest. Diametri enim & ad latera & ad angulos educi intelliguntur: quum sit ipse, si hûc cogitatio pertingere potest, infinitorum angulorum, & infinitorum laterum. Quanto igitur plures in Figura fuerint Semidiametri, ea tanto propius ad Circulum accedit, tantoq; perfectior. Et tamen quanto pauciores habet, tanto maiorem vsum habere videtur. Trianguli enim vsus quàm Quadrati frequentior: Quadrati rursus quàm Pentagoni: Vt in his rerum humanarum imaginem cernamus. Minorum enim obsequio maiores vtuntur. Sed de his aliâs plurà.

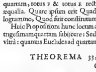
Quæ circa Diametrum Quadrati Parallelogramma, sua latera Quadrati lateribus æquidistantia habuerint, Quadrata esse oportet.

SIT Quadratum ABCD, cuius Diameter BC: sintq; duo Parallelogramma BEFG & BHKL sic posita, vt latus EB sit æquidistans lateri AC: & latus EF lateri CD: itidem latus HK eidẽ AC æquidistans, & KL ipsi AB: & Diameter CB protracta, diuidat hæc duo Parallelogramma per medium. Dico BEFG & BHKL esse Quadrata.



Quoniam enim angulus A est rectus, duoq; anguli ABC & ACB, per quintam, æquales: erit horum vterque, per trigesimamsecundam, semirectus. Quapropter & angulus EBF, per vigesimamnonam, semire

semirectus: quum CF cadat in duas Parallelos AC & EB: ob idq; per eandem, angulus BFG semirectus. Et quia latus EB, Trianguli EBF, per trigesimamquartam, est æquale lateri FG Trianguli BFG: & BF vtrique commune: erit, per quartam, basis EF æqualis basi BG. Quumq; recta AG connectat duas parallelos AC & FG, & angulus A sit rectus: erit & alternus G rectus, per vigesimamnonam. Itaque, per trigesimamsecundam, erit angulus FBG semirectus: & per sextam, duo latera FG & BG æqualia. Erit igitur totus angulus EBG rectus: ac propterea, per trigesimamquartam, totus F & totus E rectus: & quatuor latera Parallelogrammi EBFG, æqualia. Quare ipsum erit Quadratum. Eadem erit probatio de BHKL Parallelogrammo, Quod fuit constitutum.



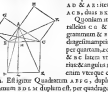
Huic Propositioni hunc locum assignauimus: quam tamen poteramus statim post trigesimamquartam subijcere: Sed ad Quadrati mentionem reponere placuit, non vltrà: quanuis Euclides ad quartam Secundi distulerit.

THEOREMA 33, PROPOSITIO XLVII, Campano 46.

In rectangulis Triangulis, Quadratum quod ex latere angulum rectum subtendente fit, Quadratis quæ ex duobus angulum rectum continentibus lateribus fiunt, est æquale.

Sit Triangulum ABC, cuius angulus A rectus. Dico Quadratum lateris BC, Quadratis duorum laterum AB & AC esse æquale.

Describam ex BC latere, secundùm doctrinam antecedentis, Quadratum BCDE, simul ex AB & AC, duo Quadrata ABFG & ACKH. Eritq; BH, ex decimaquarta Propositione, linea vna, & CG itidem vna: quum omnes anguli qui ad A sint recti. Tum ab angulo A recto demittam ad latus DE maximi Quadrati, lineam AL parallelum lateri BD, secantem BC in puncto M. Et ab eodem angulo A ducam duas AD & AE: itemq; à duobus reliquis angulis ABC & ACB, duas BK & CF.



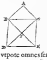
Quoniam itaque super basin BF, & inter duas parallelos CG & BF, constituuntur ABFG Parallelogrammum & BFC Triangulum: erit ABFG, per quadragesimamprimã, duplum ipsius BFC. At idem BFC, per quartam, æquale est ABD Triangulo: quum sint BF & BC latera vnius, æqualia AB & BD lateribus alterius: & angulus B huius, æqualis angulo B illius: constat enim vterque ex angulo recto & angulo ABC communi. Est igitur Quadratum ABFG, duplum Trianguli ABD. Sed & Parallelogrammum BDLM duplum est, per quadragesimamprimam, eiusdem ABD Trianguli: sunt enim super eandem basin BD, & inter duas parallelos BD & AL. Quare, per communem Notionem, Quadratum ABFG æquale est Parallelogrammo BDLM.

Atque eadem argumentatione, inductis duobus BCK & AEC Triangulis, probabimus Quadratum ACKH esse æquale Parallelogrammo LMEC. Quare quum Quadratum BCDE compleatur duobus Parallelogrammis BDLM & LMEC: ipsum erit æquale duobus Quadratis ABFG & ACKH, Quod erat demonstrandum.

Hæc est illa tam celebris Demonstratio à Pythagora Philosopho peruestigata: ob quam præ gaudio bouem Dæmonibus immolauit, si Heroni, Proclo, Lycio, & Vitruuio credimus. Quod tamen apud multos fidem non habet. Summa enim religione vir ille à cæde animantium abstinuit. Vtut est, profectò mirabile inuentum est, & verè Dei cuiusdam donum. In cuius ratiocinatione planè Philosophica, libet paulùm expatiari, vt intueamur vnde hoc Theorema desumptum sit: quóque consilio, ad huius inuestigationem sese docti homines exercuerint.

Imprimis totius meditationis occasio à Recto & Æquali profecta est: Ex quibus omnes ferè Geometricas probationes originem sumere diximus. Quod ex Triangulo Isosceli Rectangulo, quod dimidium est Quadrati, manifestum faciemus.

Sit enim Isosceles Rectangulum ABC, cuius angulus A rectus. Dico Quadratum lateris BC, æquum esse Quadratis duorum laterum AB & AC. Describo ex BC Quadratum BCDE. Cuius duco duas Diametros BE & CD, secantes inter se in puncto F. Quumq; duo latera BC & BD Trianguli BDC, sint æqualia: erunt, per quintam, duo anguli BDC & BCD æquales: ob idq; ambo semirecti, per trigesimamsecundam: quum sit angulus CBD rectus. Eadem ratione erunt duo anguli CBE & CEB Trianguli BEC, semirecti: Quapropter duo latera BF & CF Trianguli BCF, per sextam, æqualia. Rursus quum duo anguli ABC & ACB Trianguli



ABC, sint semirecti, per quintam & trigesimamsecundam: & basis BC vtrique Triangulorum ABC & BCF communis: erunt duo latera AB & AC, æqualia duobus lateribus FB & FC, per vigesimamsextam. Est igitur ABFC quatuor laterum æqualium, & quatuor angulorum rectorum: quapropter à Definitione, Quadratum. Iam verò quum duo anguli FCE & FEC Trianguli CEF, sint æquales duobus angulis FBC & FCB ipsius Trianguli CBF, vtpote omnes semirecti: & basis BC æqualis basi EC: erunt duo Triangula BCF & FEC æqualia. Ex communi itaque Notione, erit totum Triangulum BEC, æquale Quadrato ABFC. Atqui Triangulum BEC, per trigesimamquartam, dimidium est Quadrati BCDE. Et Quadratum igitur ABFC dimidium est eiusdem BCDE. Si itaque bis sumatur ABFC, ratione duorum laterum AB & AC: duo Quadrata æquabuntur Quadrato BCDE, Quod erat demonstrandum.

Hæc Demonstratio amplior quidem: Sed tamen tota Figuræ specie facilis: adeò Rectum & Æquale sese, vbicunque sint, manifesta ostendunt.

At in Scalenis Rectangulis excogitanda fuit alia Demonstrationis ratio. Nam deficiente laterum æqualitate, deficiunt quæ ab hac pendent, æqualitates Quadratorum & Triangulorũ. Erat quidem in promptu hæc ratiocinatio, Cuiuslibet Trianguli Rectanguli, duo reliqui anguli à recto sunt æquales duobus semirectis, per trigesimamsecundam. Conuenit igitur vt Quadrata duorum laterum ipsos subtendentium quãuis inæqualium, tantum efficiant, quantùm si esset vterq; semirectus: quum sint bases æquales. Quod enim vni laterum inæqualium decrescit, alteri accrescit: vt æqualitas potentię compensetur (Potentia lineæ tanta est, quantum est ipsius Quadratum). Ac rationi consentaneum est, vt potentia lateris rectum angulum subtendentis, æqualis sit duabus laterum quæ duos semirectos subtendunt, potentijs. Magnitudo enim angulorum, magnitudinem laterum oppositorum metitur: & contrà.

Quod vt clariùs exponamus, In duobus Triangulis Rectangulis ABC & ADE, quorum ABC sit Isosceles, sed ADE Scalenum: notum est, ex vulgata illa trigesimasecunda, duos angulos semirectos ABC & ACB, Trianguli



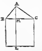
ABC, æquales esse duobus ADE & AED Trianguli AED, simul sumptis. Sed non propreterà notũ est, si Quadratũ basis BC sit æquale Quadratis duorũ laterũ AB & AC, continuò Quadratũ basis DE æquale esse Quadratis duorum laterum AD & AE: etiamsi duæ bases BC & ED sint æquales. Id verò Pythagoras

probauit

probauit generali Demonstratione. Quæ certè difficillima fuit inuentu, sicut in disquirendo experti sumus. Nam quum simili studio incenderemur, multa quidem in hanc rem meditati sumus: scopum tamẽ alia ratione attingere non potuimus quàm per proportiones: idq; ex Figura Gnomonica. Sed nos huius fontis vberrimi riuulos aliquot consectemur.

REPETITA igitur prima constructione, iucundum est intueri quonam pacto Rectum & Æqualitas hîc suum ius tueantur. Nam tametsi A B & A C latera sint inæqualia, ob idq; anguli A B C & A C B inæquales: officio tamen perpendicularis A M, pulchra fit permutatio: vt intelligantur omnia in integro remanere. Angulus enim C A M, angulo A B C: angulusq; B A M angulo A C M perpetuò est æqualis, Quod sic demonstratur:

Angulus B A C Trianguli A B C, ponitur rectus: angulusq; A M C Trianguli A C M, rectus: & angulus C vtrique Triangulo communis. Itaque, per trigesimamsecundam & communem sententiam, reliquus C A M angulus, reliquo A B C est æqualis. Rursus quum vterque' angulus qui ad M sit rectus, & angulus B probatus sit æqualis angulo C A M: consequitur vt reliquus B A M, reliquo A C M sit æqualis, Quod erat demonstrandum.



Vides vt perpendicularis æqualitatem testetur non laterum singulorum, sed potentiæ ipsorum. Hoc est, si Quadratum lineæ B C ad duo Quadrata æqualia reducatur: hæc erunt æqualia Quadratis duorum laterum A B & A C. Vbi etiam animaduertendum, eæ lineæ vt præstent mutuas operas, officij permutatione. Nam ex subtensa B C fiunt duo latera Triangulorum aduentitiorum A B M & A C M: Et ex duobus lateribus primi Trianguli A B C, rectum angulum continentibus, fiunt duæ subtensæ. Sed quonam modo fiat ea reductio Quadratorum ad æqualitatem, placet hîc demonstrare.

Duo Quadrata inæqualia ad duo Quadrata æqualia reducere.

Sint Quadrata duarum linearum A B & A C, inæqualia. Volo hæc duo reducere ad duo Quadrata æqualia. Ambas lineas constituo ad angulum rectum B A C: & connecto B C. Tum super duobus terminis B & C facio duos angulos semirectos (id verò fiet erectis perpendicularibus, ac diuiso vtroque angulorum rectorum per æqualia: vt docet nona huius): sintq; anguli B C D & C B D semirecti: & concurrant duæ lineæ B D & C D ad punctum D. Dico duo Quadrata laterum B D & C D, esse æqualia duobus Quadratis laterum A B & A C.



Sunt enim, per sextam, duo latera D B & D C æqualia: & angulus D, per trigesimamsecundam, rectus: Quapropter Quadratum lateris B C, æquale est Quadrans duorum laterum D B & D C, per hanc quadragesimamseptimam. Sed & æquale Quadratis duorum A B & A C, per eandem. Quare, per animi Notionem, Quadrata duorum D B & D C sunt æqualia duorum A B & A C Quadratis, Quod erat faciendum.

Ex hoc habetur & hoc Theorema,

Si duo Triangula rectangula æquales subtensas habuerint: Quadrata duorum reliquorum laterum vnius, sunt æqualia Quadratis duorum reliquorum alterius.

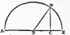
Quod satis patet ex postrema constructione.
Sed & indidem hoc exibit Problema,

Propositis duabus lineis inæqualibus, potentiam maioris supra minorem cognoscere.

Potent

Potentiam lineæ tantam esse diximus, quantum est ipsius Quadratum.

Sint itaque duæ lineæ inæquales AB & BC, quarum maior AB. Volo scire quantùm possit AB supra BC. Hoc est, volo reperire Quadratum, quod cum Quadrato ipsius BC, sit æquale Quadrato lineæ.



Statuo AB & BC in continuum: positoq; Centro in puncto continuationis B, describo Semicirculum ADE secundùm Quantitatem maioris AB. Tum super C puncto, erigo perpendicularem: quam produco donec attingat peripheriam in puncto D: Et connecto BD. Dico Quadratum lineæ CD esse excessum potentiæ lineæ AB supra BC.

Quoniam enim angulus C Trianguli BCD, est rectus: Quadratum subtensæ BD, æquale est Quadratis duorum laterum BC & CD: igitur & ijsdem est æquale Quadratum lineæ AB. Quare Quadratum lineæ BC tanto minus est Quadrato lineæ AB, quantum est Quadratum lineæ CD, Quod erat inuestigandum.

Hanc Theon subnectit decimætertiæ Decimi: eamq; probat ex prima Quarti & trigesima Tertij: quam tamen ex hac sola Pythagorica demonstrari vides.

Ex hoc etiam habetur ratio inueniendi tertij lateris Trianguli Rectanguli, duobus quibusuis cognitis. Quod clarius est, quàm quod probandum sit.

NVNC autem hoc Theorema quonam pacto ad Numeros accommodetur, obiter ostendemus. In Numeris itaque locum præcipuè habet, quum maximus ad medium fuerit vt 5 ad 4: scilicet in proportione, quam vocant, sesquiquarta: & medius ad minimum vt 4 ad 3: hoc est, in proportione sesquitertia. Eiusmodi sunt tres 3, 4, 5: tresq; 6, 8, 10: & 12, 16, 20: sicq; continuo progressu. Quadratum enim 20 est 400, ac tantundem efficiunt 144 cum 256, quæ sunt Quadrata ex 12 & 16.

Sed & cognito minimo laterum in Numeris, Scalenum Rectangulum sic absolues. Dimidium cogniti duc in se: à producto aufert vnitatem: habebis alterum latus. Huic adde binarium: fiet maximum latus, seu subtensa. Vt, sit minimum latus 10: Horum dimidium duc in se: fiunt 25: à quibus ablata vnitate, supersunt 24, medium latus: his adde binarium: fiunt 26, subtensa. Horum enim Quadratum 676: Et tantundem efficiunt 100 & 576, Quadrata ex 10 & 24.

Isoscelia verò Rectangula ex Numeris non conficiuntur. In quo id dignum consideratione est, quod in Geometricis est euidentius & Demonstrationi promptius, id in Numeris veritatem non habere. Nunquam enim duo Quadrati Numeri æquales Quadratum Numerum componunt. Atque eam ob causam, lateris Quadrati ad Diametrum proportio incognita. Est enim Diameter radix seu latus duorum Quadratorum æqualium in vnum Quadratum iunctorum: ob id, irrationale: hoc est, vt in Arithmeticis dicitur, radix Surda. Vt radix 2, 8, 32: sicq; continenter, alternis Numeris Progressionum intermissis.

Illud quoque non omittam, hoc Theorema Pythagoricum non ex Triangulo, sed ex Parallelogrammo Rectangulo esse depromptum. Quod & Numerorum affinitas ostendit. Nullum enim Numeris cum Triangulis commercium: neque Superficies, per Numeros absoluitur, nisi multiplicatione. Multiplicatio verò, minimùm, quadrilatera est. In Geometricis etiam Superficiebus, Triangula vt dimidia Parallelogrammorum considerari debent. Sic itaque proponi poterat Theorema.

In Parallelogrammis Rectangulis, Quadratum quod à Dimetiente fit, æquale est duorum quæ subtendit laterum, Quadratis.

Quia tamen simpliciora sunt Triangula, atque ob id tractabiliora: eorum nobis officium accersimus. Sed de his aliâs.

e Ex

Ex hoc etiam fatis euidens eft illud,

Data Diametro, componere Quadratum cuius eft Diameter.

Conftitutis enim fuper duobus terminis lineæ, duobus angulis femirectis, & perfecto Triangulo: habebitur dimidium Quadrati. Cuius altera pars facilè conficietur. Inde manifeftum eft & illud,

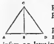
Quadratum Diametri, duplum eft Quadrati cuius ipfa eft Diameter.

Quod nulla indiget probatione.

THEOREMA 34, PROPOSITIO XLVIII.

Si quod ab vno laterum Trianguli fit Quadratum, æquale fuerit duorum reliquorum Quadratis: angulus ab illo latere fubtenfus, rectus erit.

Sit Triangulum A B C: fitq́, Quadratum lateris A C æquale Quadratis duorum laterum A B & B C. Dico angulum B oppofitum A C lateri, effe rectum. Conuerfa antecedentis.



A puncto B ad contrariam partem ipfi A puncto, educo perpendicularem B D, per vndecimam: quam pono æqualem A B, per fecundam: Et connecto D C.

Et quoniam angulus C B D rectus eft: Quadratum lateris C D, per antecedentem, æquale eft Quadratis duorum laterum B C & B D: quapropter & Quadratis duorum B C & B A. Eft igitur ipfum C D latus ipfi A C lateri æquale, per animi Notionem: quum vtriufque Quadrata fint æqualia. Triangulum itaque A B C, æquale eft & æquilaterum Triangulo C B D. Quare angulus A B C, per octauam, angulo C B D æqualis: ob idq́; rectus, Quod erat demonftrandum.

PROBABIMVS & ab impoffibili, Conuerfarum more.

Si enim Quadratum lateris A C eft æquale Quadratis duorum A B & B C, neque angulus B fit rectus: erit maior aut minor recto. Ac priùs fit maior recto, fiatq́ angulus D B C rectus, educta perpendiculari B D, per vndecimam: quæ ponatur



æqualis lateri A B, per fecundam: Et connectatur C D. Eritq́, per directam huius, Quadratū ipfius C D æquale Quadratis duorum B D & B C: quapropter & Quadratis duorū B A & B C. Erit igitur bafis C D æqualis bafi C A: quum ipfarum Quadrata fint æqualia: Quod eft contra vigefimamquartam Propofitionem. Nam quum fit angulus A B C maior angulo D B C, fintq́; duo latera A B & B C duobus lateribus D B & B C mutuò æqualia: erit bafis C A maior bafi C D. Eadem ratione probauimus angulum totum B, non effe recto minorem. Eft igitur rectus, Quod erat demonftrandum.

Sed probationes quæ affirmatè concludunt, digniores funt iis quæ ab impoffibili.

Ex Campano.

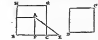
Propofitis duobus Quadratis, alteri illorum Gnomonem reliquo æqualem adiungere.

Licet intempeftiuè Campanus Gnomonis conftructionem hîc appofuiffet, quum Euclides Gnomonem pofteriùs definiat: eius tamen Propofitionem loco non mutauimus: præfertim quum Gnomonem iam anteà in Quadragefimatertia definierimus.

Sint itaque duo Quadrata A B & C D: quorum alteri, vt ipfi A B, fit adiungendus Gnomon æqualis reliquo C D.

Protra

Protrahatur latus BF Quadrati AB in continuum: & ponatur FE æqualis lateri ipsius CD: Et connectatur EA. Eritq́, Quadratum ipsius EA, æquale duobus Quadratis EF & FA Trianguli EFA, per Quadragesimamseptimam. Sed Quadratum ipsius EF, est æquale ipsi CD Quadrato. Et Quadratum lateris FA, est ipsum AB Quadratum. Est igitur Quadratum ipsius AE æquale duobus CD & AB Quadratis. At verò EF & FA latera sunt, per vigesimam primi, longiora latere AE. Sed FA est æquale FB. Erunt ergo EF & FB, ipso AE longiora. Quapropter tota BE longior est quàm AE. Secetur igitur ad ipsius æqualitatem in puncto C: fiatq́, BC æqualis ipsi AE: Et describatur Quadratum BCGH ex ipsa BC: quod erit æquale Quadrato ipsius AE. Sed Quadratum AE duobus Quadratis AB & BC est æquale. Et Quadratum igitur BCGH æquale est eisdem. Quare, quum Quadramm ipsius BC componatur ex Quadrato AB & Gnomone FGAH: erit Gnomon ipsi CD Quadrato æqualis, Quod fuit faciendum.



SED multò expeditiùs sic poterat confici.

Sint duo Quadrata, quorum latera sint AB & BC. Volo Quadrato lineæ AB adiungere Gnomonem æqualem Quadrato lineæ BC.



Constituo ambas ad angulum rectum ABC. Et connecto AC. Descriptoq́, Quadrato lateris AE, quod sit ABDE, protraho BA ad punctum F: vt sit BF æqualis AC. Et describo Quadratum BFGH: quod erit æquale Quadrato ipsius AC, quum lineæ sint æquales: ac propterea æquale Quadratis duorum AB & BC. Quum itaque BFGH Quadratum, compleatur ipso Quadrato AEDE & Gnomonem FEGD: erit ipse Gnomon æqualis Quadrato lineæ BC, Quod erat faciendum.

Libri Primi Geometricorum Elementorum

FINIS.

IACOBI PELETARII

CENOMANI IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA DEMONSTRATIONVM LIBER SECVNDVS.

Parallelogrammum Rectangulum.

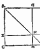
OMne Parallelogrammum Rectangulum, sub duabus rectum angulum constituentibus rectis lineis dicitur contineri.

Parallelogrammum Rectangulum fit ex ductu lineæ rectæ in lineam rectam, idq; instar Numerorum: facilitatis, vt diximus, gratia. Vbi etiam meminisse oportet. Ducere maiorem lineam in minorem, idem esse ac si minorem in maiorem ducamus: sicut 3 in 4, & 4 in 3, idem efficiunt.

Gnomon.

In Parallelogrammis, alterutrum Parallelogrammorum quæ circa Dimetientem consistunt cum duobus Supplementis, Gnomon vocatur.

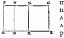
Hoc iam antè in quadragesimatertia Primi explicauimus. Si enim in Figura adscripta, Parallelogrammum H F cum duobus Supplementis C K & K B sumamus, efficietur Gnomon E D G: seu, vt alij designant, C D G K: quod vnum & idem est. Quod si Parallelogrammum E G cum iisdem Supplementis sumpserimus, fiet Gnomon F A C K. Deest itaque Gnomoni alterutrum interiorum Parallelogrammorum quæ Dimetiens media secat: quæq; Complementa in quadragesimatertia Primi nominauimus.



THEOREMA PRIMVM, PROPOSITIO PRIMA.

SI duarum linearum altera in partes aliquot secta fuerit: quod ex ductu alterius in alteram fit, æquum est iis quæ ab insecta & quolibet segmento Rectangulis, producuntur.

Sint duæ lineæ AB & C: quarum AB secta sit in partes AD, DE & EB. Dico id quod fit ex ductu C in AB, æquale esse Rectangulis quæ fiunt ex ductu eiusdem C in AD, DE, & EB segmenta.

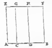


Super puncta A & B, erigam lineas perpendiculares AF & BG, per vndecimam Primi: & ponam vtranq, æqualem ipsi C: Et connexa FG, complebo Parallelogrammum Rectangulum ABFG. Quod quidem ex linea AF (ea est linea C) in AB producitur. Tum à punctis sectionum D & E ducam, per trigesimamprimam Primi, ipsis AF & BG, parallelos DH & EK: quarum vtraque est æqualis C, quum vtraque sit æqualis AF, per trigesimamquartam Primi. Et quoniam Rectangulum ADFH producitur ex segmento AD in AF (hoc est in C), & DEHK ex segmento DE in eandem C: ac denique EBKG ex segmento EB in eam ipsam: atq; hæc tria totum Parallelogrammum ABFG componunt: manifesta est Propositio.

THEOREMA 2, PROPOSITIO II.

Si recta linea vtcunque secta fuerit: quæ sub tota & quolibet segmentorum Rectangula continentur, æqualia sunt ei quod ex tota fit Quadrato.

Sit linea AB diuisa in AC, CD, & DB segmenta. Dico Rectangula quæ fiunt ex segmentis in ipsam AB simul sumpta, æqualia esse Quadrato eiusdem AB.



Quod manifestum erit, descripto Quadrato ABEF, ductisq; lineis CG & DH, quæ sint lateribus Quadrati paralleli & æquales.

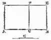
ALITER. Sumatur K æqualis AB. Eritq;, per antecedentem, quod fit ex K in totam AB, æquale ijs quæ fiunt ex eadem K in quælibet segmenta ipsius AB. Et quia quod ex K in AB, æquale est ei quod ex AB in seipsam: & quæ ex K in quælibet segmenta ipsius AB fiunt, æqualia ijs quæ ex AB in suas partes, propterea quòd K & AB sunt æquales: constat Propositio.

THEOREMA 3, PROPOSITIO III.

Si in duo segmenta fuerit linea diuisa: quod ex tota in alterutrum segmentorum fit Rectangulum, æquale est ei quod ex segmentis fit Rectangulo, eiq; quod ex priori segmento fit Quadrato.

Sit linea AB diuisa in AC & CB segmenta. Dico Rectangulum ex tota AB in AC segmentum, æquale esse Rectangulo quod ex AC in CB, eiq; quod ex AC in seipsum, simul sumptis.

Describatur ex AC, Quadratum ACDF: Et producta DF ad E punctum, connexaq; BE parallelo, perficiatur Parallelogrammum ABDE. Quod quum constet ipso Quadrato ACDF & Parallelogrammo FB, quod est ex CB in AC: manifesta est Propositio.



ALITER, ex prima huius. Sumatur G æqualis AC. Et quoniã totum BD Parallelogrammum fit ex G in AB, quum sint AD & G æquales: & CD Quadratum ex eadem G in AC segmenta (lineæ enim æquales sunt) & deniq; FB Parallelogrammum, ex eadem G in CB segmentum: atque his æquale est quod fit ex G in AB, per primam huius: erit quod fit ex AC in AB æquale ei quod fit ex AC in BC, & in seipsum, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 4, PROPOSITIO IIII.

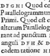
Si recta linea secetur vtcunque: Quadrata quæ fiunt ex segmentis cum eo quod bis sub ipsis segmentis comprehenditur Rectangulo, æqualia sunt ei quod à tota fit Quadrato.

Consectarium.

Quæ circa Dimetientem Quadrati consistunt Parallelogramma, Quadrata esse oportet.

Sit recta linea AB, secta in partes AC & CB. Dico duo Quadrata ex AC & CB cum eo quod bis sub iisdem AC & CB continetur Rectangulo, esse æqualia Quadrato totius AB.

Ex altera partium, vt ex CB, describo Quadratum CBDE: & productis lateribus ED & CD, ponam DF & DG æqualia ipsi AC: & perficiam Quadratum DFGH: Quod constat esse Quadratum ipsius AC. Tum connexa FA, erit CF Parallelogrammum Rectangulum, per trigesimamtertiam & trigesimamquartam Primi. Quod est ex CB in AC: quum CD sit ipsi CB æqualis. Similiter constituo alterum Parallelogrammum Rectangulum DK, productis BE & HG, quæ concurrant ad punctum K: quod eadem ratione fit ex CB in AC. Quoniam ergo duo anguli DFH & DFA sunt recti: erit per decimamquartam primi, AH linea vna: & eadem ratione HK linea vna, & BK etiam vna. Et quia GK ipsi CB est æqualis: & AF eidem CB, quia æqualis ipsi EB: item HF & HG ipsi AC: erunt duæ AH & HK toti AB æquales, per secundam animi Notionem. Itidem & BK eidem AB æqualis. Quum itaque quatuor anguli A, B, H, K sint recti, erit ABHK Quadratum: & nonnisi ipsius AB, quum sit vnum laterum. Quare, quum ipsum compleatur Quadratis duarum AC & CB, duobusq; Supplementis quæ sub CB & AC comprehenduntur: constat Propositio.



HANC Demonstrationem, meo iudicio, expeditiorem reddidi, quàm sit ea quæ per Diametros & angulos semirectos astruitur verbosiùs. Nihil est enim quod magis oneret memoriam, quàm longè ducta Demonstratio: in iis præsertim Propositionibus quas vel ipsa constructio manifestas reddit. Diametrum tamen apposuimus: vt quouismodo cõstitutio innotesceret. Scilicet descripto Quadrato BD, & eius Diametro

metro producta, dum concurrat cum A F prius erecta, ad punctum H: tum perfectum A B H K Parallelogrammum probabitur esse Quadratum: & D F G H itidem Quadratum, per semirectos angulos Triangulorum. Quod ego ratiocinationi cuiusque relinquo.

ALITER. Sit linea A B, vt prius, diuisa in A C & C B. Eritq́, per secundam huius, quod fit ex tota A B in se, æquale ei quod fit ex ipsa in A C & C B. At ex ipsa in A C tantum fit, quantum ex A C in se & ex A C in B C, per tertiam huius. Item ex ipsa A B tota in B C, tantum fit, quantum ex C B in se & ex C B in A C, per eandem. Quod igitur fit ex tota A B in se, æquum est ijs quæ fiunt ex A C in se & in C B, & ex C B in se & in A C, Quod erat demonstrandum.

Hæc secunda Demonstratio est Campani. Sed, vt ipse subijcit, ex ea non constat Consectarium. Quod nos quum iam probauerimus ad quadragesimamsextam Primi: hoc ipsum Theorema sic facilè ostendemus.

Ex ipsa A B diuisa in A C & C B vt prius, constituatur Quadratum A B D E, cuius Diameter B D: ducatur Parallelus C F, secans Diametrum in puncto G: itemq́; altera Parallelus H K per idem punctum G. Ac tum, ex Demonstratione nostra, erunt K F & C H Quadrata, eaq́, ipsorum A C & C B: vt satis constat ex constructione. Præterea duo A G & G B Supplementa, sunt quæ fiunt ex A C in B C. Quare quum hæc quatuor perficiant totum A B D E Quadratum: manifesta est Propositio.



Hæc etiam proponi potest in hæc verba,

Si duæ lineæ inæquales fuerint: quod fit ex maiori in seipsam, æquum est ei quod ex minori in seipsam cum duobus quæ fiunt ex excessu in maiorem & ex eodem in minorem, Parallelogrammis.

Scilicet A B linea excedat A C lineam, portione C B. Constabit Quadratum maioris A B, Quadrato minoris A C cum eo quod fit ex C B in A B (vt est in posteriore Figura Parallelogrammum A H), & altero quod fit ex eodem C B in minorem A C, quod est G E Parallelogrammum.

In quo rerum imaginem iucundè contemplari subit. Nempè quod deest lineæ A C, ducetur in ipsam: hoc est, C B in A C: sed & quod superest ipsi A B (id ipsum verò est C B) ducetur in ipsam A B: sicq́; ex duabus vna fiet potentia.

THEOREMA 5, PROPOSITIO V.

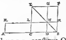
Si recta linea secetur in duo æqualia duoq́; inæqualia: Rectangulum comprehensum sub inæqualibus segmentis totius vnà cum Quadrato quod à medio segmentorum, æquale est ei quod à dimidia fit Quadrato.

Sit recta linea A B æqualiter diuisa in puncto C, & inæqualiter in puncto D. Dico Quadratum C B, esse æquale ei quod fit ex A D in D B cum Quadrato C D.



Describam ex C B Quadratum C B E F, cum Diametro B E: & ducam D G ipsi B F parallelum, secantem Diametrum in puncto H, & E F in puncto G. Et per punctum H ducam K M æqualem & æquidistantem A B, per trigesimamprimam Primi, secantem B F in puncto M, & C E in puncto L: Et connectam A K æquidistantem C E. Eruntq́;, per Consectarium antecedentis, seu per ea quæ probauimus ad quadragesimamsextam Primi, L G & D M

Quadrata: L G quidem lineæ C D: & D M, lineæ D B. Et quia D H est æqualis D B: erit A H id quod fit ex ductu A D in D B. Et quia, per quadragesimamtertiam



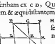
Primi, duo Supplementa C H & H F sunt æqualia: addito Parallelogrammo D M vtriq;, erit C M æquale D F. Quum itaque A L sit æquale C M, per trigesimamsextam Primi: erit & ipsum æquale D F. Gnomon igitur C B G H æqualis est A H Parallelogrammo. Sed Gnomon ipse cum Quadrato L G, constituit Quadratum dimidiæ A B. Quare A H Parallelogrammum & Quadratũ L G, sunt æqualia Quadrato dimidiæ A B, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 6, PROPOSITIO VI.

Si recta linea in duo æqualia secetur, alia verò ei linea addatur in continuum: quod ex tota iam composita in eam quæ addita est, cum Quadrato quod fit à dimidia, æquum est ei quod à dimidia cum addita tanquàm ab vna, fit Quadrato.

Sit linea A B æqualiter diuisa in puncto C: eiq; addita B D. Dico id quod fit ex composita A D in additam B D cum Quadrato dimidiæ C B, esse æquale Quadrato C D.

Describam ex C D, Quadratum C D E F, cuius sit Diameter E D. Et ducam B G æqualem & æquidistantem D F, quæ secet Diametrum in puncto H. Et per ipsum

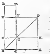


H punctum, ducam K M æqualem & æquidistantem A D, secantem D F in puncto M, & C E in puncto L: Et connectam A K æquidistantem C L.

Iam per Consectarium quartæ huius, vtrunque Parallelogrammum L G & B M est Quadratum: hoc quidem ex B D, illud verò ex C B: & propterea D M æqualis B D: totumq; A M Parallelogrammum, est quod fit ex A D in B D. Quia ergo, per trigesimamsextam Primi, A L est æquale C H: & per quadragesimamtertiam eiusdem, Supplementum C H æquale Supplemento H F: erit & A L eidem H F ęquale. Quare Gnomon C D G H, toti A M Parallelogrammo æqualis. Sed Gnomon C D G H cum Quadrato L G, constituit Quadratum lineæ C D. Quare A M Parallelogrammum cum Quadrato L G, æquale est Quadrato lineæ C D, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 7, PROPOSITIO VII.

Si recta linea secetur in duas quantascunq; partes: Quadratum quod à tota cum Quadrato quod ab vna partium, æquale est ei quod bis producitur ex tota in ipsam partem Rectangulo, cum eo quod ex altera parte fit Quadrato.



Sit linea A B, fortuitò diuisa in puncto C. Dico Quadratum totius A B cum Quadrato B C, æquale esse ei quod bis fit ex A B in B C cum Quadrato A C.

Describatur Quadratum totius A B, quod fit A B D E, cuius Diameter B D: ducaturq; C F æqualis & æquidistans B E, secans Diametrum in puncto G: & per G punctum, H K æqualis & æquidistans A B.

Quia

Quia igitur Quadratum A E cum Quadrato C H, est æquale Quadrato K F cum duobus Parallelogrammis A H & C E, patet Propositio.

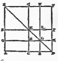
Si quis manifestius perspicere velit, faciat H M Parallelogrammum æquale H A Parallelogrammo, vt E M sit Quadratum B C. Ac tum omnes apparebunt Propositionis particulæ.

THEOREMA 8, PROPOSITIO VIII.

Si recta linea secetur vtcunque: Rectangulum comprehensum quater sub tota & vno segmentorum cum eo quod ex altero segmento fit Quadrato, æquale est ei quod à tota cum priori segmento tanquam ab vna describitur, Quadrato.

Recta linea A B secetur vtcunque in puncto C. Dico id quod quater sub A B & C B continetur Rectangulum vnà cum Quadrato quod ex A C, æquale esse ei quod ex A B & B C tanquam ex vnica linea, Quadrato.

Producatur A B in D punctum, & sit B D æqualis C B: Et ex A D describatur Quadratum A D E F. Tum ducta Diametro D E, lineisq; C G & B H parallelis & æqualibus ipsi D F, quæ secent Diametrum in punctis K & L: & per ipsa K & L puncta, ductis M O & P R parallelis & æqualibus ipsi D A: Erit, per Consectarium quartæ, huius vnaquæque Superficierum R G, N Q, B M, & C P, quadrata. Quumq; B D & B L latera Quadrati B M, sint æqualia C B & B L lateribus Parallelogrammi C L: erit & ipsum C L Quadratum: similiq; ratione L P Quadratum: ob idq; quatuor Quadrata componentia C P Quadratum, inter se æqualia. Et quia totus Gnomon A D G K circunstans Quadratum R G, est, per trigesimamsextam, & quadragesimamtertiam Primi, quadruplus ei quod ex A B in B D fit Rectangulo, quia quadruplus ad Superficiem A L: constat Propositio: Scilicet A L sumptum quater cum Quadrato R G, esse Quadrato A D E F æquale.



De Gnomone autem euidentiùs perspiciemus, si aduerterimus Superficiem mutilam A D K R, esse duplam ad superficiem A L. Duo enim Triangula K N L & L B D, sunt æqualia Quadrato C L. Idemq; de altera parte D F G K sit iudicium. Quod nos si prolixiùs exponeremus, ingenium studiosorum obrueremus potiùs quàm instrueremus. Eæ enim figurationes Gnomonum eiusmodi sunt, vt sese ob concinnitatem sponte elucident.

Campanus hoc Theorema proponit in hæc verba,

Si linea in duas partes secetur, atque ad ipsam addatur recta linea vni segmentorum æqualis: quod ex tota composita in seipsam fiet, æquale erit iis quæ ex ductu prioris lineæ in ipsam additam quater, & ei quod ex altero segmento fit Quadrato.

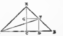
Id verò in idem recidit cum priore. Est enim B D ipsi C D perpetuò æqualis. Sed tamen eiusmodi varietates inutiles non sunt: quippe quæ ingenium ad horum Theorematum praxin & vsum instructius reddant. Neque incommodè fecerit qui se in Propositionibus Geometricis, huius præsertim Secundi libri variandis, immò & nouis excogitandis exercuerit. Cuiusmodi satis multas adscribere possemus. Sed eæ priuatim à Geometra sunt examinandæ, non inter reliquas collocandæ. Tædiosum est enim hæc Theoremata congerere quæ cum Numeris communicant. Eamq; ob causam, nec sine iudicio, paucis fuit contentus Euclides.

THEOREMA 9, PROPOSITIO IX.

Si recta linea in duo æqualia duoq; inæqualia diuidatur: quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt Quadrata, dupla sunt eius quod à dimidia cum eo quod à medio segmentorum fit Quadrato.

Sit linea A B diuisa æqualiter in puncto C, & inæqualiter in D. Dico duo Quadrata quæ ex A D & D B, dupla esse duorum quæ ex A C & C D, Quadratorum.

Super punctum C erigo perpendicularem C E, æqualem vtrique A C & C B: Et connecto E A & E B. Eruntq;, per quintam & trigesimamsecundam Primi, duo anguli A & B semirecti: & vterque qui ad E, semirectus: sicq; totus E rectus. Erigo itaque D F perpendicularem super A B, secantem E B in puncto F. Et erit, per eandem trigesimamsecundam, angulus B F D semirectus: quapropter D B & D F latera, per sextam Primi, æqualia. Iam à puncto F duco F G æquidistantem, ob idq; æqualem C D. Et erit, per secundam partem vigesimænonæ, & per trigesimamsecundam Primi, vterque angulus qui ad G, rectus, & angulus E F G semirectus: est enim F E G semirectus. Quapropter E G & F G latera, per sextam Primi, æqualia. Tandem connecto A F. Et quoniam Quadratum E F, per quadragesimamseptimam Primi, æquale est Quadratis duarum E G & G F: ipsum erit duplum ad Quadratum G F: ob idq; ad Quadratum C D. Eadem ratione erit Quadratum E A duplum ad Quadratum A C. Quumq; Quadratum A F sit æquale Quadratis A E & E F, per eandem: ipsum erit duplum ad Quadrata A C & C D. Sed & idem Quadratum A F æquale est Quadratis A D & D F. Et Quadrata igitur A D & D F dupla sunt ad Quadrata A C & C D. Et quia Quadratum D B est æquale Quadrato D F: erunt duo Quadrata A D & D B, dupla ad duo A C & C D, Quod erat demonstrandum.



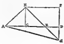
IN HAC contueri licet quantam vim habeant Rectum & Æquale. Quatuor enim Triangulis Isoscelibus Rectangulis, id est, ex quatuor Semiquadratis, tota nititur probatio.

THEOREMA 10, PROPOSITIO X.

Si recta linea secetur in duo æqualia, apponatur autem ei alia in continuum: quod ex tota iam composita, quodq; ex apposita ambo fiunt Quadrata, dupla sunt amborum, eius scilicet quod ex dimidia eiusq; quod ex dimidia cum apposita, Quadratorum.

Sit recta linea A B æqualiter diuisa in puncto C: eiq; in continuum apposita B D. Dico id quod fit ex A D Quadratum cum Quadrato quod ex B D, duplum esse eius quod ex A C cum eo quod ex C D Quadrato.

Erigo C E perpendicularem super A B, & æqualem vtrique linearum A C & C B: Et connecto A E & E B. Eritq;, per quintam & trigesimamsecundam Primi, vterque angulus A & B: item vterque qui ad E, semirectus: totusq; E rectus.



A puncto itaque E, duco E F æqualem & æquidistantem C D: & connecto F D, quam protraho donec concurrat cum linea E B protracta, ad punctum G: Tum o nnecto A G.

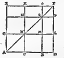
Et quia angulus E C D est rectus: erit, per vltimã partẽ vigesimænonæ Primi, angulus C E F rectus. Quum igitur

tur angulus C E B sit semirectus: erit & F E G semirectus. Quumq́, F D, per trigesimamtertiam Primi, sit æquidistans E C: erit, per trigesimamquartam eiusdem, angulus qui ad F, rectus: sicq́, angulus E G F, per trigesimamsecundam, semirectus: quia F E G semirectus. Et, per eandem, angulus D B G semirectus: quum angulus B D G, per decimamtertiam eiusdem, sit rectus. Duo igitur latera E F & F G, per sextam eiusdem, sunt æqualia: itidemq́, duo B D & D G æqualia. Quapropter Quadratum E G, per quadragesimamseptimam Primi, duplum est ad Quadratum E F: ob id, & ad Quadratum C D. Quadratum item A E, per eandem, duplum est ad Quadratum A C. Quumq́, Quadratum A G, per eandem, sit æquale duobus Quadratis A E & E G, similiter & duobus Quadratis A D & D G: sitq́; Quadratum D G æquale Quadrato B D: erunt duo Quadrata A D & D G (ea sunt A D & B D) dupla duobus Quadratis A C & C D, Quod fuit demonstrandum.

ALITER. Sit linea A B bifariam diuisa in C, eiq́, in continuum adiuncta B D. Dico Quadratum quod ex A D cum Quadrato quod ex B D, duplum esse ad vtrunque, & quod ex A C & quod ex C D fit Quadratum.

Ex tota A D describo Quadratum A D E F. Et super dimidia A C describo Quadratum A C G H: protractisq́; G H & C H ad sectiones duorum laterum E F & D F, describo H L K F: quod erit Quadratum ipsius C D: vt constat ducta Diametro A H F, ex Consectario quartæ huius & ex trigesimaquarta Primi: est enim K F æquale C D. Factis etiam H M & H N vtrique A C & C B æqualibus, protraho M O & N P, sese scindentes ad rectos angulos in puncto Q. Quarum vtraque secet latera Quadrati A D E F in O & P punctis.

Iam verò nihil attinet probare H Q esse Quadratum ipsius A C, quum sit Quadratum C B: sicut Q F Quadratum ipsius B D: neque H P Parallelogrammum, æquale esse vtrique Supplementorum E H & H D: quum H O sit eis communiter æquale: Denique N O & Q L Supplementa esse æqualia.



Atque etiam manifesta sunt hæc ex ipsa Figuræ specie: propterea quòd omnes anguli qui circa Diametrum, sunt semirecti & latera æqualia. Diligenter itaque aduertentes quibus partibus componatur Quadratum H F, quod est ex C D, sic ratiocinabimur. Quum totum D E Quadratum integretur duobus A H & H F Quadratis & duobus Supplementis E H & H D: probandum nobis est, hæc ipsa Supplementa cum Quadrato Q F (quod est ex B D) esse æqualia duobus ipsis A H & H F Quadratis. Tum enim probauerimus hæc duo Quadrata A H & H F bis sumpta, toti Quadrato D E cum Quadrato Q F esse æqualia, quod initio suscepimus. Sic autem erit Demonstratio.

Supplementum E H æquale est Parallelogrammo H P: Et Quadratum A H cum Supplemento minori N O, æquum est alteri Supplemento H D, per primam animi Notionem, toties sumptam quoties opus fuerit. Duo igitur Supplementa E H & H D, sunt æqualia Quadrato A H & Gnomoni K H L Q. Si ergo ad vtrunque accedat Quadratum Q F: erunt duo Supplementa E H & H D cum Quadrato Q F, æqualia Quadrato A H, Gnomoni K H L Q, & Quadrato Q F. Sed hæc tria constituunt duo Quadrata A H & H F. Sunt igitur duo Supplementa E H & H D cum Quadrato Q F, æqualia duobus Quadratis A H & H F, Quod erat secundarium. Quare duo Quadrata A H & H F bis sumpta, toti Quadrato D E cum Quadrato Q F sunt æqualia, Quod erat probandum.

HÆC Demonstratio longiorem quidem habet deductionem, sed nihilominus acutam: Quam nos ex Figura Gnomonica venati sumus: Ex qua huiusce libri Secundi, immò totius ferè Geometriæ Demonstrationes insigniores hauriuntur.

PROB

PROBLEMA 1, PROPOSITIO XI.

Datam rectam lineam ſic ſecare, vt quod ex tota & altero ſegmentorum fit Rectangulum, æquale ſit ei quod ex altero ſegmento fit Quadrato.

Sit linea AB ſic diuidenda, vt quod ex tota in vnum ſegmentorum fiet Rectangulum, æquale ſit ei quod ex altero ſegmento fiet Quadrato.

Deſcribo ex AB, Quadratum ABCD. Cuius latus BD diuido per æqualia in E: & connecto AE: Et protraho EB ad F punctum, vt ſit EF æqualis AE: Et ex BF, portione exteriori, deſcribo Quadratum BFGH: vt BH latus reſectum ſit ex AB. Dico AB ſic ſectam eſſe in puncto H, vt quod fit ex AB in AH, æquale ſit Quadrato quod ex HB.

Protraho GH ad K, punctum lateris CD, æqualem & æquidiſtantem AC: Eritq; HC Rectangulum ex AH in AB: quod probabitur æquale BFGH Quadrato.



Quoniam enim linea BD diuiſa eſt per æqualia in E, atque eidem addita linea BF: erit, per ſextam huius, quod fit ex DF in BF cum Quadrato EB, æquale Quadrato EF: quapropter & Quadrato EA: ob idq;, per quadrageſimamſeptimam Primi, Quadratis AB & EB. Ablato igitur vtrinque Quadrato EB, erit quod fit ex DF in BF (quod eſt Parallelogrammum FK) æquale Quadrato lineæ AB. Dempto igitur vtrinque Parallelogrammo BK, ſupererit Quadratum BG æquale Parallelogrammo HC, Quod fuit demonſtrandum.

OBSERVABIMVS hoc Problema nequaquam, vt cæteras huius Secundi Libri Propoſitiones, ad Numeros reduci poſſe. Quum enim poſuerimus latus DB (id eſt AB) atque in duo æqualia diuiſerimus, vt in E puncto: linea AE ſuperueniens rationem conturbat: hoc eſt, nullam habet rationem ad latus AB nominatam: ob idq; per Numeros minimè explicabilem. Nam quum Quadratum ipſius AE ſit æquale duobus Quadratis AB & EB, per quadrageſimamſeptimam Primi: & EB ſit dimidium AB: erit ipſum AE irrationale. Vt enim duo Quadrati Numeri æquales Quadratum Numerum iuncti efficere non poſſunt: ita nec duo Quadrati Numeri Quadratum Numerum efficient, quorum alter ſit Quadratum dimidiæ radicis alterius.

Id nos exemplo notum faciemus. Quadra 8, fiunt 64: hæc geminata nunquàm Quadratum Numerum conſtituent. Ita, diuidantur 8 in duo æqualia, fient 4. Certè Quadrata duorum 8 & 4, quæ ſunt 64 & 16, Quadratum Numerum efficere non poſſunt: faciunt enim 80. Hoc verò eſſet neceſſarium, vt hoc Problema in Numeris locum haberet. At verò per Numeros Irrationales figurabitur in hunc modum.

Sint 8 ſic diuidenda, vt quod ex toto in alteram fiet partium, æquale ſit ei quod ex reliqua parte fiet Quadrato.

Duco 8 in ſe, fiunt 64, hoc eſt, Quadratum ABCD. Diuido 8 in duo æqualia, fiunt 4, vt DE aut EB linea. Duco 4 in ſe, fiunt 16: hæc addo ad 64, proueniunt 80: quorum radix eſt ℞ 80. Ea eſt linea AE ſeu EF, per quadrageſimamſeptimam Primi. Quum itaque EF ſit ℞ 80, & EB ſit 4: erit BF, ℞ 80 m̃ 4. Ac tanta erit BH. Sed AH erit 8 m̃ ℞ 80 m̃ 4: hoc eſt, 12 m̃ ℞ 80. Iam 12 m̃ ℞ 80, ducta in 8, tantundem efficiunt quantùm ℞ 80 m̃ 4 in ſe ducta, ſicut vult hæc vndecima. Hæc verò in ſecundo noſtræ Algebræ volumine abundè explicauimus: quam nos propediem, Deo iuuante, latinam faciemus.

Atque has omnes Secundi Libri Propoſitiones Campanus Numeris accommodat, ſub Decimamſextam Noni, hanc tamen vndecimam omninò à Numeris excludit. Neque interim de Irrationalibus verbum vllum facit.

THEO

THEOREMA 11, PROPOSITIO XII.

In Amblygoniis Triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit Quadratum, tanto maius est duorum reliquorum Quadratis quantum est id quod continetur bis sub vno horum,& eo quod ipsi adiungitur in quod perpendicularis cadit, augmento.

Sit Triangulum A B C, cuius angulus A obtusus. Et ptotracto latere B A interminatè, ducatur, per duodecimam Primi, à puncto C ad protractam, perpendicularis C D: vt sit A D augmentum lateris B A. Dico Quadratum lateris B C, tanto maius esse Quadratis duotum B A & A C laterum, quantum est id quod bis continetur sub B A & A D, Rectangulum: scilicet, Quadratum B C æquale esse Quadratis B A & A C cum eo quod bis fit ex B A in A D.



Est enim, per quattam huius, Quadratum B D æquale Quadratis duorum B A & A D & ei quod bis sub ipsis B A & A D continetur, Rectangulo. Et quia Quadratum B C, per quadragesimamseptimam Primi, est æquale duobus B D & C D: etit idem B C Quadratum æquale tribus Quadratis B A, A D, & D C & ei quod bis sub B A & A D continetur Rectangulo. At, per eandem, Quadratum A C, æquale est Quadratis A D & D C. Est igitut Quadratum B C æquale Quadratis B A & A C & ei quod bis sub B A & A D comprehenditur, Rectangulo, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XIII.

In Triangulis, quod ex latere alterum acutorum angulorum subtendente fit Quadratum, tanto minus est duorum reliquorum laterum Quadratis, quantum est id quod bis continetur sub illo in quod perpendicularis introrsùm cadit & ea ipsius parte quæ perpendiculari anguloq; acuto interiacet.

Quod Euclides de Triangulis Oxygonijs proposuit, nos cum Campano ad omnia Triangula ampliauimus. Triangula enim omnia duos, minimùm, habent acutos angulos.

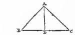
Si itaque fuerit Oxygonium, à quolibet angulorum demittatur petpendicularis, Si verò Orthogonium aut Amblygonium, demittenda erir ab angulo recto aut ab obtuso: in id larus scilicet quod duobus acutis angulis interiacet: quæ omninò intra Triangulum cadet, vt demonstrauimus ad vigesimam Primi. Ac tum huius Theorematis Demonstratio tres Triangulorum species generatim complectetur.

Sit igitur Triangulum A B C, cuius duo anguli B & C acuti, quantuscumque sit angulus A. Ab angulo A, demitto perpendicularem A D in latus B C. Dico Quadratum lateris A B, tanto minus esse Quadratis duorum laterum A C & B C, quantum est duplum eius quod fir ex toto B C in partem D C. Vel etiam Quadratum A C, tanto minus esse Quadratis duorum AB & B C, quantum est duplum eius quod fit ex C B in B D.



Quadratum enim A C, per quadragesimamseptimam Primi, æquale est duobus Quadratis A D & D C: Et Quadratum B C, per septimam huius, cum Quadrato D C,

f æquale



æquale est Quadrato B D cum eo quod bis fit ex B C in D C.
Tria igitur Quadrata A C, B C, & D C, æqualia sunt tribus Quadratis A D, D C, & B D cum eo quod bis fit ex B C in D C. Commune auferatur Quadratum D C: Erunt duo Quadrata A C & B C, æqualia duobus Quadratis A D & B D cum eo quod bis fit ex B C in D C. At Quadratum A B æquale est duobus Quadratis A D & B D. Quare idipsum A B Quadratum, tanto minus erit duobus A C & B C, quantum est duplum eius quod fit ex B C in D C, Quod erat probandum.

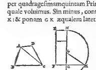
Hæc Demonstratio, quam ab illa communi aliquantùm variauimus, directa est. Æstimatio enim vtraque ponitur: vt à maiori auferatur minus.

Simili argumentandi ratione, probabitur Quadratum lateris A C, tanto minus esse Quadratis duorum A B & B C, quantum est duplum eius quod fit ex C B in D B, Rectanguli.

PROBLEMA 2, PROPOSITIO XIIII.

Dato Rectilineo æquale Quadratum describere.

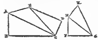
Sit datum Rectilineum A B C D, cui æquale Quadratum describendum sit. Constituo Parallelogrammum Rectangulum E F G H, æquale ipsi A B C D Rectilineo, per quadragesimamquintam Primi. Cuius si latera fuerint æqualia, id ipsum erit quale voluimus. Sin minus, continuabo vnum laterum ipsius, vt H G, ad punctum K: & ponam G K æqualem lateri F G. Diuidam postmodùm totam H K bifariam, in puncto L. Atque in ipso L posito Centro, describam super lineam H K, Semicirculum H M K: Et protraham F G latus, donec secet Semicirculum in puncto M. Dico Quadratum lineæ G M esse æquale Rectilineo A B C D.



Connectam L M. Et quia linea H K diuisa est æqualiter in L, & inæqualiter in G. erit, per quintam huius, quod fit ex H G in G K cum Quadrato G L, æquale Quadrato L K: ob id, Quadrato L M: quapropter & duobus Quadratis L G & G M, per quadragesimamseptimam Primi. Dempto ergo vtrinque Quadrato L G: erit quod fit ex H G in G K (id vero est Parallelogrammum E G) æquale Quadrato G M. Quare & Quadratum G M æquale Rectilineo A B C D, Quod faciendum fuit.

Hoc etiam loco addere placuit ex Campano, Compendium inueniendi lateris Tetragonici: ad eas Figuras, quas vocant Irregulares, æquandas.

Sit Figura quæpiam anormis, A B C D, quatuor laterum: Quæ in terna Triangula resoluetur A B C, A E C, & E C D.



Hæc tria, secundùm doctrinam huius, reduco ad tria Quadrata: quorum latera sint, verbi gratia, F G, F H, & H K. Tum statuo F G & F H ad angulum rectum F: & connecto G H: super quam erigo H K, itidem ad angulum rectum G H K: Et connecto G K. Et erit G K latus Tetragoni quæsiti: vt satis manifestum est ex Propositione illa quadragesimaseptima Primi.

In Figuris autem Regularibus, quę in Triangula æqualia resoluũtur, compendium multò promptius est. Expeditè enim ad vnum Parallelogrammum Rectangulum reducuntur, & indè ad Quadratum.

Aliter. Conuertantur singulatim Triangula in Parallelogramma Rectangula, quæ vnum Parallelogrammum efficiant. Verbi gratia, reducatur Triangulum A B C ad Parallelogrammum F G H K Rectangulum, per quadragesimamsecundam Primi.



Primi. Tum ſuper linea HK conſtituatur Parallelogrammum itidem Rectangulum HKLM, æquale Triangulo ACE, per quadrageſimamquartam eiuſdem. Demùm, per eandem, ſuper linea LM conſtituatur Parallelogrammum LMNO, æquale Triangulo CDE.

Eritq́; FGNO vnum Parallelogrammum, per quadrageſimamquintam Primi: atque æquale toti Figuræ Rectilineæ ABCDE. Quod, per hanc vltimam, conuertes in Quadratum.

Libri Secundi Geometricorum Elementorum

FINIS.

IACOBI PELETARII
CENOMANI IN EVCLIDIS
ELEMENTA GEOMETRICA
DEMONSTRATIONVM
LIBER TERTIVS.

DEFINITIONES.

Aequales Circuli, sunt quorum Diametri sunt æquales: vel quorum quæ ex Centro lineæ, sunt æquales.

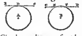
Quum Circuli peripheria infinitatem præ se ferat, Circuli dimensio à Peripheria non petitur, sed à linea recta, nempè à Diametro.

Hæc verò Definitio ex se clara est. Nam quum Diametri per Circulorum Centra educantur, & dimidium orbium semper subtendant: si sint ipsæ æquales, ab iisdem quoque dimidia æqualia subtendi par est. Quorum verò dimidia sunt æqualia, ea inter se sunt æqualia.



Vt, Æquales quidem sunt A & B Circuli, ob æqualitatem Diametrorum: maiores autem C Circulo: quum minor sit huius Dimetiens. Sed & æquè significans est & manifesta altera pars Definitionis, vel ex ea, quam in Principiis Libri Primi posuimus, Circuli Definitione.

2 Contingere Circulum recta linea dicitur, quæ Circulo incumbens in vtranq; partem eiecta, Circulum non secat.



Circulum A, linea B C contingit in D puncto. Sed Circulum B, linea C D secat in E & F punctis.

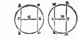
3 Circuli sese contingere dicuntur, quorum Peripheriæ sese tangentes, inter se non secant.



Duo Circuli A & B sese contingunt in C. Duo verò E & F, secant alter alterum in G & H punctis.

4 Aequaliter distare à Centro, lineæ dicuntur, quum à Centro ad ipsas ductæ perpendiculares sunt æquales. Remotior autem à Centro linea, in quam maior perpendicularis cadit.

Vt in



Vt in Circulo A B C D, duæ lineæ A B & C D æqualiter diſtant ab E Centro: proptereà quòd duæ E F & E G perpendiculares, ſunt æquales. At in Circulo H K L M, remotior eſt H K à Centro N quàm ſit L M. Eſt enim N O ipſa N P maior.

5 Sectio Circuli, eſt Figura comprehenſa ſub recta linea & peripheriæ portione.



Figura A B C, quam conſtituunt A C recta & A B C portio peripheriæ: Item D B E, quam conſtituunt D E recta & D B E portio eiuſdem, Sectiones ſunt Circuli. Rectæ verò A C & D E, Chordæ vulgò dicuntur: ſicut curuæ A B C & D B E, Arcus. Sed F B G figura, proprio nomine Semicirculus vocatur: & F G, Diameter.

6 Angulus ſectionis, eſt qui ſub recta linea & Circuli peripheria comprehenditur.

In poſterioribus Figuris, Anguli D, A, E, & C, Sectionis dicuntur.

7 In ſectione angulus conſiſtit, quem efficiunt duæ lineæ, à ſubtenſæ baſis finibus ad punctum aliquod peripheriæ ſectionis concurrentes.



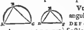
Angulus A B C, qui fit à duabus A B & B C rectis, quæ exeuntes à duobus terminis A & C ſubtenſæ A C, ad punctum B coeunt: in ſectione conſiſtit. Quòd ſi angulum B abſque baſi A C: hoc eſt, ſine Trianguli conſideratione accipias: is in peripheria eſſe dicetur.

8 Sector Circuli, eſt Figura comprehenſa ſub lineis rectis quæ à duobus peripheriæ punctis eductæ: ad Centrum conueniunt.



Duæ lineæ A B & C B, à duobus punctis A & C peripheriæ, ad Centrum B concurrentes, Circuli Sectorem A C B conſtituunt.

9 Similes Sectiones Circuli, dicuntur quæ angulos æquos ſuſcipiūt: vel in quibus anguli ſunt æquales.



Vt, ſi angulus rectilineus B, Sectionis A B C, æqualis ſit angulo E, Sectionis D E F: duæ Circuli Sectiones A B C & D E F dicentur Similes.

AEQVALES verò Sectiones non definit: quia earum infinitæ ſunt deſcriptiones. Poſſunt enim ſub inæqualibus rectis lineis æquales Sectiones conſtitui, ſed in Circulis inæqualibus: quum ex omni Circulo poſſit intelligi pars abſcindi, parti alterius Circuli æqualis. Sed quæ æquales ſunt & rectis lineis æqualibus continentur, æquales omnino habent peripherias. Diuiſisq́; rectis lineis biſariam, perpendiculares ad peripheriam erectæ, æquales ſunt. Vt duæ Sectiones A B C & D E F, ſub lineis A C & D F æqualibus conſtitutæ, ſi ſint æquales, duæq́; A C & D F diuidantur biſariam in punctis G & H: erunt quoque duæ perpendiculares B G & E H æquales. Quod nos præmittendum duximus, demonſtrandæ vigeſimæſecundæ & vigeſimætertiæ huius gratia: quum ſignificantior Definitio dari non poſſit Sectionum Æqualium. Nam ſi in Circulis æqualibus, quælibet puncta vtriuſque æqualiter diſtant à linea ſubtenſa, nulla eſt inæqualitas portionum.



PROBLEMA PRIMVM, PROPOSITIO PRIMA.

Dati Circuli Centrum inuenire.

Sit datus Circulus A B C, cuius Centrum sit inueniendum.

In ipso Circulo duco lineam fortuitam A C: quam diuido æqualiter, per Decimam Primi, in puncto D: A quo excito perpendicularem D B, per vndecimam eiusdem: quę vtrinque protracta, peripheriam attingat in punctis B & E. Hanc etiam B E diuido æqualiter in puncto F. Dico punctum F esse Centrum Circuli.



Nam si in F non est Centrum, non erit in puncto alio lineæ E B, vt in G: Essent enim à Centro ad peripheriam duæ G B & G E inæquales. Erit ergo extra E B lineam: sitq́, si possit, in H puncto. Et connectantur H A, H C, & H D: vt fiat Triangulum H A C, diuisum in duo Triangula H A D & H C D. Et quia duo latera H A & H D, Trianguli H A D, sunt æqualia duobus lateribus H C & H D, Trianguli H C D, & basis A D basi D C æqualis: erit, per octauam Primi, angulus A D H æqualis angulo C D H: quapropter vterq; rectus, per decimam Definitionem Primi. At angulus A D B positus est rectus: Erit igitur angulus A D B ipsi A D H æqualis, pars toti, contra animi sensum. Non est igitur Centrum in H puncto. Sed nec vspiam alibi inuenietur quàm in F puncto, Quod erat ostendendum.

VIDES ex Recto & Æquo, punctum omnium maximè momentaneum peruestigari. In quo rationi conueniens erat, vt linea E B in vtranque partem æqualiter (vt indicat perpendiculum) inclinata, Circulum diuideret per medium: atq; ob id, Centrum in se contineret. Sed quoniam id repræsentabatur tantùm, non constabat: ad absurdum perducitur qui aduersatur. Vt in Circulo Affirmatio Negatioq́, conueniant: sicut in Vniuerso Actio & Priuatio, Generatio & Corruptio. Ac breuiter contrariis omnia constant & perficiuntur. Centri igitur inuestigatio, veritatis conquisitionem graphicè exponit: quæ quum vna sit, atq; in medio posita: tamen inuentu longè difficillima, per controuersias elucescit: ac non nisi bono & æquo obsequitur.

Consectarium.

Si in Circulo recta linea rectam lineam æqualiter & ad angulos rectos diuidat: in diuidente est Centrum Circuli.

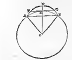
Hoc verò satis patet ex Demonstratione iam posita. Si igitur duæ lineæ in Circulo æqualiter secent altera alteram: Centrum in puncto sectionis situm erit. Quod tamen posterius probabitur.

THEOREMA 1, PROPOSITIO II.

Si ad duo puncta peripheriæ recta linea applicata fuerit: ipsa intra Circulum transit.

Sint duo puncta A & B, in peripheria Circuli A B, cuius Centrum C. Dico non posse educi lineam rectam ab A ad B, quin secet Circulum. Alioqui, transeat extra Circulum, vt linea A D B: quæ sit recta, si fieri possit. Et connectantur C A & C B: vt

sit recta



sit recta A D B, basis Trianguli C A B. Eruntq́, per quintam Primi, duo anguli C A B & C B A æquales. Tum à Centro C ducatur recta C D, quæ secet peripheriam in puncto E. Et erit, per decimamsextam Primi, angulus A D C maior angulo C B D: ob idq́, maior angulo C A D: ac propterea latus A C, per decimamoctauam eiusdem, maius latere C D. Et quia latus C E æquale est lateri C A: erit C E maius C D, pars toto, quod est absurdũ. Quare linea A D B non transibit, vt recta sit, extra Circulum: sed secabit ipsum, Quod erat probandum.

Hæc Propositio tacitè consequebatur ad Definitionem Sectionis Circuli: quæ omni arcui rectam subtensam tribuit: Subtensa autem intra Circulum existente, nulla alia extra Circulũ recta, in eadẽ puncta terminabitur, ne duæ rectæ superficiẽ cõcludant. Item & ex linea cõtingente Circulum. Nam siqua recta linea est quæ cõtingat Circulũ: ipsa erit F G: quæ vtrinq, educta attinget lineã A D B, vt in pũctis F & G: Sicq́; rursus duæ lineæ rectæ cõcludent superficiem, cõtra Principiũ. Et tamẽ fuit proponẽdum & demonstrandũ, ne in sequentibus cogeremur cõtradictiones sæpiùs excipere.

THEOREMA 2, PROPOSITIO III.

In Circulo, si recta linea per Centrum ducta rectam lineam extra Centrũ ductam bifariam secuerit: ipsam quoque ad angulos rectos diuidet: Et si ad angulos rectos diuiserit, ipsam etiam ad angulos rectos secabit.

Sit Circulus A B C: in quo linea D E per Centrum ducta, lineam A B extra Centrum ductam secet bifariam in puncto F. Dico angulos qui ad F, esse rectos: Contrà etiã, si anguli qui ad F recti, lineã A B bifariã diuidi in F puncto.



Connectam E A & E B. Eruntq́, duo latera E A & E F, Trianguli E A F æqualia duobus E B & E F, Trianguli E B F: basis verò A F basi F B, ex positione, æqualis. Quare, per octauam Primi, angulus F vnius, æqualis angulo F alterius: & propterea recti, Quod est prius.

Iam vterq́, angulus qui ad F, ponatur rectus. Et constat, ex quinta Primi, duos angulos A & B esse æquales: quum sint duo latera E A & E B æqualia. Quare in duobus Triangulis E A F & E B F, erunt, per vigesimamsextam Primi, duo latera A F & F B æqualia, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 3, PROPOSITIO IIII.

Si duæ rectæ lineæ se in Circulo secantes, per Centrum non transierint: neque se bifariam secabunt.

Sit Circulus A B C D, cuius Centrum E: in quo duæ lineæ A C & B D secent inter se in puncto F: quarum neutra, vel etiam altera tantùm, per Centrum transeat: Dico ipsas se mutuò non per æqualia secare. Nam si sic altera vtranque per æqualia secare possit: sit prius vt neutra per Centrum transeat. A Centro E ducam lineam E F. Eritq́, per priorem partem antecedentis, vnusquisque angulorum E F A, E F B, E F C, & E F D, rectus, Quod fieri non potest, ne pars sit toti æqualis.



Si verò altera tantùm illarum, vt B D, per Centrum transierit: dico sic quoque ipsas se non bifariam secare. Nam, per priorem partem antecedentis, B D per Centrum transiens, diuidensq́, A C per æqualia, diuidet eandem ad angulos rectos.

Et quia A C diuidit ipsam B D æqualiter: ipsa per Centrum transibit, ex Consectario primæ huius, Quod est contra positionem. Quare A B & C D non se per æqualia secant, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 4, PROPOSITIO V.

Circulorum se mutuò secantium non est idem Centrum.

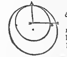


Sint duo Circuli A B C & A D B, secantes se in punctis A & B. Dico eorum non esse vnum Centrum.

Nam si vnum possit esse, sit ipsum E punctum: Et ducatur linea E A: ac mox linea E C: quæ secet A C B peripheriam in puncto C: & A D B alteram peripheriam in F. Eruntq;, per Centri Definitionem, E A & E F æquales: sed & E A & E C æquales. Quare quum ambæ E F & E C sint æquales ipsi E A, erunt & ipsæ inter se æquales, Quod esse non potest. Non igitur E, sed nec vllum aliud punctum, erit vtriusque Centrum, Quod erat probandum.

THEOREMA 5, PROPOSITIO VI.

Circulorum se contingentium non est idem Centrum.



Sint duo Circuli A B A & A C A, se contingentes in puncto A. Dico eorum non esse idem Centrum.

Si enim idem possit esse, sit ipsum D: Et ducantur D A & D B C lineæ. Eritq;, per definitionem Centri & Circuli, vtraq; linearum D B & D C æqualis ipsi D A. Quapropter D B æqualis D C, Quod esse non potest.

Circulorum verò sese extrinsecùs tangentium satis constat diuersa esse Centra: quum Centrum sit in medio sui Circuli.

THEOREMA 6, PROPOSITIO VII.

Si in Diametro Circuli punctum signetur aliud à Centro, & ab ipso ad peripheriam plures educãtur lineæ: maxima erit in qua Centrum, minima verò quæ Diametrum perficit. Sed quæ Centro propiores sunt, cæteris longiores. Duæ autem duntaxat rectæ lineæ æquales ab ipso puncto ad peripheriam exibunt.

Sit Circulus A B C D, cuius Centrum E, Diameter verò A E D: in qua signetur punctum F inter E & D. Et ab ipso F educantur lineæ F B, F C, & F G. Dico F A esse maximam linearum, minimam verò F D: Aliarũ autem, F B ipsa F C maiorem: & F C ipsa F G. Dico etiam duas tantùm lineas rectas æquales educi posse vtrinque ab F puncto ad peripheriam.



Connectãtur enim E B, E C, & E G. Et quoniã duo latera F E & E B, Trianguli B E F, sunt, per vigesimã Primi, maiora tertio F B: erit & F A maior F B: quum F A sit æqualis duabus F E & E B. Rursus quum duo latera E B & E F, Trianguli B E F, sint æqualia duobus E F & E C, Trianguli C E F: angulus autem B E F maior angulo C E F: erit & basis F B, per vigesimamquartam Primi, maior basi F C: Atque eadem ratione F C maior quàm F G. Quoniam rursus duæ E F & F G, per vigesimam Primi,

maiores

maiores sunt quàm E G : erunt & maiores quàm E D : quum E G & E D sint æquales. Communi itaque ablata E F, supererit F G maior F D. Maxima igitur est F A, minima vero F D. Maior autem F B quàm F C : & F C quàm F G, Quod est prius.

Constituatur porro angulus F E H, per vigesimamtertiam Primi : æqualis angulo F E G. & connectatur F H. Quumq; E F & E G sint æquales duabus E F & E H : erit, per quartam Primi, basis F G basi F H æqualis.

Ac iam probabitur ab ipso F puncto, aliam lineam quàm F H, ad peripheriam educi non posse, æqualē ipsi F G. Nam si possit, ducatur F K. Quumq; F H sit æqualis F G, erit & ipsa F H ipsi F K æqualis, repugnante prima parte huius Propositionis : quum sit F K propior Centro. Duæ igitur duntaxat F G & F H sunt æquales.

VEL sic. Connectatur E K. Et quoniam æqualis est E G ipsi E K, communis autem E F : & basis F G basi F K æqualis : erit, per octauam Primi, angulus F E G æqualis angulo F E K. At angulus F E H positus est æqualis angulo F E G. Erit igitur angulus F E K æqualis angulo F E H, minor maiori, quod est absurdum.

Hinc manifestum est, duas lineas ab aliquo puncto Diametri hinc inde exeuntes, si æquales angulos cum Diametro fecerint, æquales esse. Quales hoc loco sunt duæ F G & F H lineæ.

THEOREMA 7, PROPOSITIO VIII.

Si à puncto extra Circulum signato lineæ exeuntes, Circulum secent : maxima est quæ per Centrum transit: Aliarum autem quæque, quanto huic propior, tanto maior. Partium verò ipsarum quæ extrinsecùs in peripheriam cadunt, minima est quæ in continuum est Diametri : aliarum autem quæque, quanto huic propior, tanto minor. Et duæ duntaxat rectę lineę æquales ab ipso puncto in peripheriam cadunt.

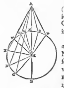
A puncto A signato extra Circulum B C D B, cuius Centrum N, ducantur plures lineæ secantes Circulum : sintq; A K N B, A H C, A G D, & A F E. Dico A B per Centrum eductam, omnium esse longissimam : & A C maiorem A D, & A D maiorem A E. Earum verò quæ extrinsecùs sunt partium, minimam esse A K, & A H minorem A G, & A G minorem A F. Dico prætereà duas tantùm rectas lineas æquales à puncto A in peripheriam cadere posse.



Connectantur N C, N D, N E, N F, N G, & N H. Eademq; erit argumentandi ratio quæ in antecedente. Nam in Triangulo A C N, duo latera A N & N C (quibus est æqualis A B) sunt maiora A C, per vigesimam Primi : Quapropter & A B maior A C. Rursus quum angulus A N C, maior sit angulo A N D : erit A C maior A D, per vigesimamquartam eiusdem: ob idq; A D maior A E. Et quoniam N K est æqualis N H : sed N H & H A maiores N A : ablatis æqualibus N H & N K, supererit A H maior A K. Et quoniam angulus A N G, maior est angulo A N H : erit basis A G maior basi A H : ob idq;, A F maior A G. Maxima igitur est A B earum quæ per Circulum educuntur. Maior autem A C quàm ipsa D. & A D maior quàm A E. Minima porrò exteriorum est A K : & minor A H quàm A G, & A G minor quàm A F, Quod est prius.

Iam verò constituatur, per vigesimamtertiam Primi, angulus A N O æqualis angulo A N H. Eritq; duorum Triangulorum A N H & A N O, basis A H æqualis basi A O, per quartam

quartam Primi. Neque erit alia ipsi A H æqualis. Nam si ponatur A P: erit & ipsa A P, per communem Notionem, æqualis A O, Quod iam probauimus fieri non posse: quum sit A O ipsi A K propior.



VEL sic. Quoniam angulus A N P, maior est angulo A N H (est enim A N O ipsi A N H æqualis): erit quoque basis A P, maior basi A H, per vigesimamquartam Primi. Non igitur æqualis. Quare duæ tantùm lineæ rectæ æquales vtrinque à puncto A in peripheriam cadunt, Quod erat demonstrandum.

NEMO autem offendatur, quòd hîc lineas quæ extrinsecùs aduenientes Circulum penetrant, secare Circulum dixerimus. Nam tametsi propriè sola K B Circulum secet: tamen A B sic secare Circulum dicitur, vt quæuis linea lineam alteram. Atque vt linea N B peripheriam secat vnico sui puncto, nempè puncto B: ita A B Circulum secat, ea sui parte quæ est K B. Facessat igitur calumnia. Nos enim Geometriam exquisitè quidem, sed non nimis anxiè tractamus. Sed quę abundant, quantùm possumus, resecamus, atque ad breuitatem veritati amicam contrahimus.

THEOREMA 8, PROPOSITIO IX.

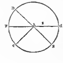
Si à puncto intra Circulum signato, plures quàm duæ æquales rectæ lineæ ad peripheriam ductæ fuerint: punctum illud erit Circuli Centrum.

Sit punctum A, signatum in Circulo B C D: sintq́; tres rectæ lineæ A B, A C, & A D, ad peripheriam eductæ, æquales. Dico punctum A esse Centrum Circuli.



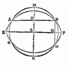
Connectam enim B C & C D: Quarum vtranque diuidam æqualiter: illam quidem in puncto E, hanc verò in puncto F. Et ducam A E & A F: quas vtrinque producam ad peripheriam Circuli.

Eritq́; Triangulorum A B E & A C E, vterque angulus qui ad E, æqualis: ob id, vterque rectus. Eadem ratione vterque angulorum qui ad F, rectus Et quia A E diuidit B C per medium: & A F itidem D C per medium: vtraque ipsarum transit per Centrum, ex Consectario primæ huius. Quare quum vtraque occurrat alteri in puncto A: erit ipsum A Centrum Circuli, Quod erat probandum.



ALITER ab impossibili. Sit E, si possit, Centrum Circuli: ex quo per punctum A, vtrinque extendatur linea ad puncta F & G peripheriæ: vt sit F G Dimetiens Circuli. Eritq́;, per septimã huius, A G maxima: & maior A B quàm A C, quũ sit propior Centro E, Quod est cõtra hypothesin.

THEOREMA 9, PROPOSITIO X.



Circulus Circulum in pluribus quàm duobus punctis non secat.

Secet, si fieri possit, Circulus A B C, Circulum D E F in pluribus quàm duobus punctis, vt in A, B, D, & G. Et coniunctæ A B & B D, secentur æqualiter in H & K. A quibus H & K punctis, excitentur perpendiculares H C & K E: quæ extendantur vtrinque ad E, F, C, & M, puncta peripheriæ

D E F:

DEF: secentq́, inter se in L puncto.

Et erit, per Consectarium Primæ huius, punctum L Centrum vtriusque Circuli, repugnante quinta eiusdem.

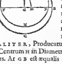


ALITER. Secent se, vt prius, duo Circuli in punctis A, B, D, G. Et, per primam huius, ponatur H Centrum Circuli ABC. Et connectantur tres HA, HD, & HG: quæ ex definitione Centri & Circuli, erũt æquales. Et quia exeũt ad peripheriam vtriusque Circuli, nempè ad sectionem ipsorum: erit & H per antecedentem, Centrum Circuli DEF, contra quintam Propositionem eiusdem.

THEOREMA 10, PROPOSITIO XI.

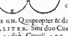
Si Circulus Circulum, siue introrsùm, siue extrinsecùs tangat: per Centra vtriusque ducta linea, in contactum ipsorum cadit.

Duo enim Circuli ABC & DEF sese tangant introrsùm in puncto A. Dico lineam eductam per eorum Centra, cadere in A punctum.



Sin minus, cadat aliorsùm: sitq́, G Centrum Circuli ABC, ex prima huius: & H Centrum Circuli DEF. Tum per G & H ducatur linea GB, secans peripheriam interioris Circuli in puncto D: exterioris verò in B. Et ducantur GA & HA, Et quia, per vigesimam Primi, GH & HA maiores sunt GA: erunt & maiores GB. Communi igitur ablata GH, erit HA maior HB. Sed HD æqualis est ipsi HA: vtraque enim è Centro. Maior igitur est HD quàm HB, pars toto.

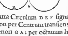
ALITER, Producatur DH ad punctum F peripheriæ DEF. Et quia G est extra Centrum H in Diametro Circuli DEF: maior erit GD quàm GA, per septimam huius. At GB est æqualis GA. Maior igitur GD quàm GB, pars toto.



Iam verò si duo Circuli se extrinsecùs tetigerint: ducatur, vt prius, linea GH per Centra iam posita G & H, secans ambas peripherias in duobus punctis B & D: Et connectantur GA & HA.

Eruntq́, per vigesimam Primi, duæ GA & HA maiores GH. Quapropter & duæ GB & HD maiores GH, Quod est falsum.

ALITER. Sint duo Circuli ABC & DEF sese extrinsecùs tangentes in puncto A: sitq́, Circuli ABC, Centrum G, vt priùs: A quo per contactum Circulorum producatur GA linea, ad punctum F peripheriæ DBF. Quæ quia negatur transire per Centrum ipsius DEF Circuli: ducatur ab eodem Centro G, altera linea GK: quę transeat, si fieri possit, per Centrum H ipsius DEF: secans peripheriam ABC in puncto B, & DEF in puncto D: partemq́, ipsius oppositam in puncto K. Et quia à puncto G



extra Circulum DEF signato, ducitur linea GK, transiens per Centrum H: & altera non per Centrum transiens, GF: minor erit pars illius exterior GD, parte huius exteriori GA: per octauam huius. Sed GA est æqualis GB. Minor igitur erit GD ipsa GB, totum parte, Quod est absurdum.

HANC posteriorem partem probauimus ex octaua huius, sicut priorem ex septima: & sane commodiùs Prior enim figuratio & si ex arte sit, tamen non facilè accipitur: Neutrum enim Centrorum in suo loco consistit.

Cæterùm

Cæterùm ex his duabus Theonis, vnam fecimus: quòd tam sint hæc duo capita coniuncta, quàm duo sequentia.

THEOREMA 11, PROPOSITIO XII.

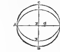
Theoni 13.

Circulus Circulum non tangit in pluribus punctis vno: & si introrsùm, & si extrinsecus tangat.

Nam, si fieri possit, tangat Circulus A B C D, Circulum A B E prius introrsùm in duobus punctis A & B: post extrinsecùs, tangat Circulus A E B A, Circulum A C B D in duobus A & B punctis.

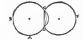


Quum itaque in priori constructione duxerimus lineam rectam ab A ad B, si ipsa ceciderit extra Circulum A B E interiorem: id erit contra doctrinam secundæ huius. Si verò cadat intra ambos: quum diuiserimus ipsam æqualiter, vt in F, & eduxerimus perpendicularem transeuntem per F ad vtranque peripheriam: ipsa transibit per vtriusque Centrum, ex Consectario primæ huius: repugnante sexta eiusdem: immò & antecedente: quum non cadat in contactum ipsorum.

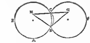


V E L sic. Sit exterioris Circuli Centrum F: interioris verò Centrum G. Et linea applicata ex F in G, si protrahatur, exibit per priorem partem antecedentis, vtrinque ad duos contactus A & B. Eritq; F A æqualis ipsi F B: è Centro enim ad peripheriam: Quapropter maior erit F A quàm G B. Eadem ratione erit G B æqualis G A. Quare F A maior G A, quod fieri non potest.

S E D nec extrinsecùs sese contingent. Linea enim ducta à puncto C ad punctum D, cadet quidem intra vnum Circulorum, sed extra alterum, Quod est contra secundam huius.



A L I T E R. Si sese contingant in duobus punctis, vt in C & D: ducatur linea recta à Centro vnius ad Centrum alterius. Atque hæc, per antecedentem, transibit per punctum C & per punctum D. Quod fieri non potest, ne duæ lineæ rectæ includant superficiem.



Potest etiam duci linea recta à Centro ad Centrum: Quæ transibit, verbi gratia, per C, alterum contactuum: ex antecedente. Ac tum connexis G D & H D, fiet Triangulũ, cuius duo latera G D & H D non erunt maiora latere G C H, contra vigesimam Primi.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XIII.

Theoni 14.

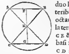
In Circulo, si rectæ lineæ æquales fuerint: eæ à Centro æqualiter distabunt. Et si à Centro æqualiter distiterint: ipsæ erunt æquales.

In Circulo esse rectæ lineæ dicuntur, quæ ad Peripheriam vtrinque terminantur.

Sint in Circulo A B C D, cuius Centrum E, duæ lineæ A B & C D æquales. Dico ipsas à Centro æqualiter distare: Et contrà, si à Centro æqualiter distent, ipsas esse æquales.

Ducam à Centro lineas E F & E G, perpendiculares ad A B & C D. Eritq;, per secundam

eundem partem tertiæ huius, A B æqualiter diuisa in F: & C D æqualiter in G puncto. Connectam postmodum E A, E B, E C, & E D. Et quoniam duo latera A B & A E, Trianguli A E B, sunt æqualia duobus lateribus C D & C E, Trianguli C E D, & basis E B, basi E D: erit, per octauam Primi, angulus B æqualis angulo C: Quum itaque duo latera A E & A F, Trianguli A E F, sint æqualia duobus lateribus C E & C G, Trianguli C E G: erit, per quartam Primi, basis E F, basi E G æqualis: Quæ quum sint perpendiculares, erunt A B & C D æqualiter distantes à Centro, per quartam Definitionem huius.



ALITER. Quadratum ipsius A E est æquale Quadratis duarum A F & E F, per quadragesimamseptimam Primi: Et Quadratum E C, per eandem, æquale Quadratis C G & E G. Atqui Quadratum A E est æquale Quadrato E C. Erunt igitur Quadrata duarum A F & E F æqualia Quadratis duarum E C & E G. Demptis itaque æqualibus A F & C G, superetunt duo Quadrata E F & E G æqualia. Quapropter ipsæ E F & E G lineæ, sunt æquales: ob idq́, A B & C D, per Definitionem, æqualiter distant à Centro, Quod est prius.

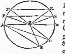
Iam consequitur, si A B & C D æqualiter distant à Centro, ipsas esse æquales. Nam quum Quadrata duarum E F & F G sint æqualia: ipsis ablatis, superetunt Quadrata duarum A F & C G æqualia: ob id, & ipsæ æquales. Erunt igitur A B & C D æquales, quum earum dimidia sint æqualia, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 13, PROPOSITIO XIIII.
Theoni 15.

In Circulo, maxima linearum est Diameter: Aliarum verò vnaquæque quanto propior Centro, tanto maior.

In Circulo A B C D, cuius Centrum E, sint plures lineæ A B, A C, A D, F G, & H K: quarum A D sit Diameter Circuli. Hanc dico esse omnium longissimam: Alias verò singulas quanto propiores Centro, tanto singulis esse maiores.

Cum Centro connectantur extremitates omnium, ductis E B, E C, E G, E K, E H, & E F. Eruntq́, per vigesimam Primi, duo latera E F & E G, Trianguli E F G, maiora tertio F G. Quæ quum sint æqualia ipsi A D: erit A D maior F G. Eademq́ ratione, maior quàm vnaquæque reliquarum, si ipsæ ponantur bases Triangulorum: quum bina quæque latera è Centro exeuntia, sint ipsi A D æqualia, Quod est prius. Porrò quum duo latera E F & E G, Trianguli E F G, sint æqualia duobus E H & E K, Trianguli E H K: & angulus F E G maior angulo H E K: erit, per vigesimamquartam Primi, basis F G maior basi H K. Haud dissimili ratione erit A C maior quàm A B. Sicq́, patet tota Propositio.

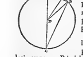


THEOREMA 14, PROPOSITIO XV.
Theoni 16.

Quæ ab extrema Circuli Diametro perpendicularis ducitur linea, extra Circulum cadit: Neque inter ipsam & peripheriam altera recta linea capi potest. Et Semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo maior est, reliquus autem minor.

Sit Circulus A B C, cuius Centrum D, Diameter verò A C: per cuius extremitatem A, ducatur linea perpendicularis, vt A E. Dico ipsam cadere extra Circulum.

Sin minus, cadat perpendicularis intra: & sit illa A B: Et connectatur D B. Eritq́, per quintã Primi, angulus D A B æqualis angulo D B A: ob idq́, rectus. At in Triangulo, duo anguli recti esse non possunt, per decimamseptimam Primi. Non igitur A B, neque alia intra Circulum, perpendicularis erit super extrema Diametro.



V E L sic. Connectatur C B. Et quia angulus C A B est rectus: ipse erit maior angulo A B C, per decimamseptimam Primi. Atque ob id, erit latus C B maius latere A C, per decimamnonam eiusdem, contra antecedentem. Cadet ergo perpendicularis extra Circulum, qualis est A E, Quod est primum.

Dico insuper, inter A E & peripheriam, non capi alteram lineam rectam. Quæ si possit, ipsa sit A F: ad quam ducatur perpendicularis D G: vt sit D G A angulus rectus. Eritq́, per decimamnonam Primi, latus D A maius latere D G, Quod est falsum. Quare inter A E & peripheriam nulla linea recta intercipitur, Quod est secundum.

Postremò, Dico angulum C A B, qui fit à Diametro C A & Semicirculo A B C, maiorem esse omni angulo acuto rectilineo: & E A B eodem minorem. Est enim C A E rectus: ob id, omni acuto maior: constatq́, duobus E A B & C A B mixtis angulis. At verò inter E A & B A, nulla recta linea capi potest, vt modò probauimus. Quapropter quum E A B diuidi nequeat per lineam rectam, erit minima pars quæ à recto possit auferri, & C A B maxima. Omnis enim angulus Rectilineus per æqualia diuiditur, ex nona Primi. Ac sic constat tota Propositio.

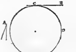
Consectarium.

Recta linea ab extremitate Diametri perpendicularis, Circulum tangit: idq́; in vno puncto.

Nam si in duobus punctis tangat, ipsa intra Circulum cadet, per secundam huius, Quod modò improbauimus.

Q V V M verò huius Theorematis caput postremum attentiùs cõsiderarem, mihi sanè in mentem subiit prima specie, Geometriam non satis sibi constare: immò adeò, repugnantiam in se admittere.

Primùm enim extra intelligentiam est, vt inter Quantitates minima dari possit: qualem hoc loco angulum, quem dicunt, Contingentiæ, seu rectiùs, Contactus, minorem omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima Quantitas detur: qualis hîc angulus Semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine Quantitas est, quòd partibus constet: & secundùm eam æquale & inæquale dicatur. Quantitatis etiam Continuæ in infinitum sectio est. Atque adeò quum in primam Propositionem Decimi incidissem, tum magis anxiè expendere cœpi quonam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima Decimi.



Si à maiori duarum Quantitatũ auferatur maius quàm dimidium, ac rursus ex reliquo maius quàm dimidium, idq́ continuò fiat: relinquetur tandem magnitudo, minor magnitudine minore posita.

Verbi caussa, Sint duo anguli, A quidem rectilineus, & B C D angulus (si modò sit angulus) contactus: Vult Prima Decimi: vt, si auferatur ab angulo A, maius quàm dimidium, ac rursus à reliqua parte

parte maius quàm dimidium: sicq́, continuò ex residuis partibus maius quàm dimidium: tandem relinquatur minor angulus quàm B C D. Cuius demonstrationem hîc non appono, quum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria Propositio est, quæ (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex Numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non videt, propositis duobus Numeris 8 & 2, quum ab octonario maius quàm dimidium abstuleris, vt quinatium: tum à ternario residuo, maius quàm dimidium, vt binarium: relinqui vnitatem, posito binario minorem?

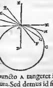
Neque verò ad rem facit quod Campanus illîc excipit, Propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est: quinetiam menti Euclidis contraria, vt nos quum illûc ventum erit, manifestum faciemus. Immò & ipse Campanus secum pugnat, quum in secunda Duodecimi demonstranda, aliisq́, Propositionibus nonnullis Solidorũ, ipse à Curuo Rectum aufert.

Nos igitur hanc dubitationem sic expediemus: vt dicamus lineam rectam quæ Circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere: scilicet B C D nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu. Et vbi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque, vt vno verbo dicam, In Decussatione (Decussationẽ hoc loco & Sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorum species perficiuntur.

Duabus enim lineis A B & C D se scindentibus in puncto E ad angulos rectos, intelligatur C D sic moueri in orbem, scilicet super puncto E fixo: vt ex C D fiat F G: hinc sanè ex recto angulo A E C, fiet obtusus A E F: inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Quumq́; facta fuerit H K: hinc quidem angulus obtusior fiet H E A, inde verò acutior K E A: sicq́; continuò, donec peruenerit ad A B, & intra eosdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immersa, vt sic dicam, linea C D in lineam A B, euanescet angulus.

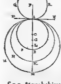


Neque diuersa ratio est in Curuo. Sit enim in Circulo A B C A, cuius Centrum D, linea D E præteriens peripheriam, & secans ipsam in A puncto fixo. Super quod circũducatur ipsa D E per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuò varii cum peripheria in ipso puncto A: donec cessante decussatione, linea E D facta sit E K, & tangat Circulum. Ac tum linea D E non iam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam B A C, quantùm ad angulum attinet: non aliter quàm si B A C esset linea recta. Neq; contrà facit, quòd diducantur lineæ, faciantq́; spatium C A K. Nam id sola A C linea efficit, quæ rectam refugit: sed eam tamen in puncto A amplectitur. Quum igitur omnis angulus in pluribus punctis non consistat quàm vno: fit vt punctum A tam sit ineptũ angulo constituendo, quàm modò erat punctum sectionis E, linearum rectarũ. Fortassè dices punctum A lineæ rectę manere in suo recto: punctumq́; A peripheriæ, in suo rotundo: neque vtrunque esse idem punctum: sed lineas se tantùm inter se velut lambere, quia altera alteram penitùs omniq́; puncto refugit: vt contraria contraposita fiant manifestiora. Id verò sensus nõ recipit. duo enim Circuli sese exteriùs tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerẽt: scilicet, si intelligeremus Circulum qui in puncto A tangeret ipsum A B C Circulum exteriùs: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse: vt nihil in cogitationem cadat, quod semel vspiam Geometria non repræsentet. Illud tamen minimè vrgebit. Immò tantò minus contactus linearum erit angulus. Habit enim vtrinque ipsarum concursus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus, per Theoremata.



Contactus duorum Circulorum interior, Quantitas non est.

Sit enim Circulus AFBA, cuius Centrum C, Diameter verò AB: per cuius extremitatem A, ducatur linea DE ad angulos rectos. Et constat, ex Consectario huius Decimæquintæ, lineam DE contingere ipsum AFBA Circulum: ac propterea DAF esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partem huiusce Decimæquintæ. Iam verò inter puncta C & B, suscipiatur in Diametro AB, Centrum G: & spatio GA, describatur alter maior Circulus AHKA. Dico FAH non esse quantitatem.



Constat quippè Circulum AHKA transire inter rectam DA & curuam AF: quum sit Semidiameter GA, maior Semidiametro CA. Manifestum quoque est, lineam DB tangere ipsum AHKA Circulum, ex eodem huiusce Decimæquintæ Consectario: ac propterea DAH esse omni acuto minorem. Describatur tertiò, secundùm maius spatium LA, Circulus AMNA. Et erit, ex eodem Consectario, DAM omni acuto minor. Sicq; in infinitum, erunt omnes contactus quos efficiet linea DE cum Circulis ductis per A punctum, quorum Centra in AB linea, minores omni acuto Rectilineo: ac sic omnes æquales (si modò æqualitas inter non quanta dici possit). Quapropter contactus DAM, erit æqualis contactui DAF: fietq; vt MAF, contactus interior Circulorum, neque augeat neque minuat contactum DAM. Igitur MAF quantitas non est, Quod erat demonstrandum.

SED & probabimus contactum interiorem Circulorum, quantitatem non esse, in hunc modum.

Nempè quum omnes Circuli sint Similes, erunt & Semicirculi Similes: Quapropter anguli qui fiunt à Diametro & peripheria, in omnibus Circulis sunt æquales: per Conuersam Definitionis Similium Sectionum: (nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti). Erit igitur angulus BAF, æqualis vtrique angulorum KAH & NAM: Ac propterea contactus FAM nihil addit ad angulum BAF. Quare FAM quantitas non est, Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterũ,

Contactus lineæ rectæ cum Circulo, Quantitas non est.

Manente enim eadem constructione, si DAF sit quantitas: ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius Decimæquintæ: neque per obliquam, vt per lineam AM: esset enim FAM pars ipsius DAF. Atqui FAM quantitas non est, vt modò probauimus. Non est igitur FAM pars ipsius DAF. Igitur DAF neque per lineam rectam neque per obliquam diuidi potest. Quare DAF quantitas non est, Quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

Contactus duorum Circulorum exterior, Quantitas non est.

In eadem constructione, protrahatur BA Diameter ad punctum P. Tum Centro P, interuallo autem PA, describatur Circulus AQRA, tangens Circulum ABFA exteriùs in puncto A. Dico contactum BAQ non esse quantitatem.

Id verò manifestum est ex posteriori Demonstratione. Nam neq; per lineam obliquam diuiditur: quum FAM non sit quantitas, per primam harum: neque per rectam, quum neque DAF sit quantitas, per secundam earundem: neque DAQ quantitas, per eandem. Quare quum FAQ partes nullas habeat, quantitas non erit, Quod erat probandum.

Ex his emerget hoc Pronuntiatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit,

Anguli qui fiunt à Diametro & Peripheria, siue intra siue extra Circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

Vt in

Vt in posteriore Figura, angulus BAF æqualis est angulo BAD: quum ipsi nihil accrescat ob contactum DAF, qui quantitas non est: & ob id, QAP rectus est, & æqualis ipsi DAP, quum DAQ nihil addat, Quod erat probandum.

Atque vt rationes quoque philosophicas (immò quæ Philosophiæ pars in Geometria non latet?) Geometricis speculationibus immisceamus: Circulus ipse omnia in se recipit, ob sui perfectionẽ. Quumq; sit omni ex parte absolutissimus, indignum sanè est vt ipsum Recti minimè capacem esse putemus. Vt verissimè Plato lineam quæ Circulum construit, tectam esse dixerit, non secus quàm eam quæ à puncto in punctum breuissimè extenditur: etsi illam, distinctionis gratia, obliquam vocemus.

HIS AD hunc modum demonstratis, facessent à Geometria Paralogismi, qualis imprimis ille est peruulgatus, quem hùc affert Campanus. Datur, inquit, angulus maior angulo BAF, & minor eodem: neque tamen datur eidem æqualis. Id verò ex superioribus refellitur: Nihil enim maius neque minus eo quod quantum non est, dici debet. In Numeris quidem id accidit. Datur enim maior Numerus quàm $\sqrt{8}$ 8 vt 3: & datur minor eodem, vt 2: neque tamen æqualis eidem, Sed quantitatis Continuæ, quàm Discretæ, longè alia est natura. Continuorum enim in infinitum sectio est: Discretorum non item: Quod & ratio vocabulorum indicat. Nam in Continuis nihil vacat, nihilq; intermittitur. In Discretis verò omnia nominatim deducta sunt. Vt, verbi gratia, bis quatuor seu octo, Arithmeticè quidem in Quadratum euadere non possunt: Geometricè verò maximè. Nos autem ex hac Demonstratione quàm latum ad Geometriæ abdita peruestiganda patefecerimus campum, aliquando, Deo iuuante, notum faciemus in proprio libello de Quadrato & Circulo: & dubitationes quæ huc contrà adduci possunt, diluemus.

Dissoluetur & ille Paralogismus à Cardano propositus libro subtiliũ decimosexto. Aliqua quantitas, inquit, potest continuè, atque adeò infinitè augeri, altera verò infinitè minui: Et tamen augmentum illius, quantuncunque euadat, minus semper erit decremento huius.

Verbi causa, Sumatur angulus rectilineus ABC: & describantur duo Circuli DEFD & DGHD, sese intrinsecùs tangentes in puncto D. quorum Centra erunt in vna Diametro DF. Tum angulus EDG Circularis, poterit infinitè augeri: ducendo scilicet



Circulos cõtinuè minores per punctum contactus D, quorum Centra sint in DF Diametro. At angulus ABC rectilineus poterit infinitè minui, per diuisiones quales docet nona Primi: vt hîc in ABN, post in ABM (atque hæc binaria diuisio satis sit). Et tamẽ angulus Circularis, augendo nunquàm euadet æqualis angulo rectilineo decrescenti: vt hîc angulus EDK, minor omninò est angulo ABM: Et si plures ducerentur Circuli, etiam infiniti: nunquàm fieret angulus contactus tam magnus quàm angulus ABM, immò quàm eius pars millesima. Quod patet, inquit, ducta linea OP contingente. Angulus enim ODK minor est omni angulo acuto rectilineo: quare EDK multo minor erit. Hactenus ex illius sententia.

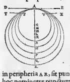
Cui sic respondemus, ABC quidem angulum infinitè minui posse: sed EDG augeri posse, id verò inficiamur. Demonstrauimus enim EDK non esse maius EDG. Atque hæc minimè cohærent, ODG æquale esse ipsi ODK, sicut & ipse ibidem astruit: & EDK maius esse EDG. Nam si ODG æquale est ODK: nihil vtiq; addit EDK ad ODG: ob id, neque ad EDG. Quare GDK, immò EDK maius esse non potest quàm EDG. Sicq; euertitur fallacia.

Proponit ibidem Cardanus ex Apollonio & Rabi Mose, de duabus lineis in eodem plano existentibus, quæ protractæ ad angulum tendere videntur, propioresq; inter se semper fiunt: Et tamen magno, vt ipse putat, miraculo, nunquàm concur-

runt: etiamsi in infinitum protrahantur. Quod etiam obiter adnotauerat Georgius Valla ex Gemino, Libro primo suæ Geometriæ, Cap. LIX. Et post hunc Cælius Calcagninus, ad Iacobum Zieglerum scribens, ex cuiusdam obseruatione cuius nomen reticet. Hunc autem paralogismum suo loco dissoluemus.

Sed quur inuentum nostrum differemus? quum iam nunc in præsentia quod pollicemur magna ex parte præstare possimus? Nos enim, vt maximè conticendum aliquid duceremus, alia certè habemus solidiora & vtiliora: (nisi quòd capdosas Propositiones refellere, non paruam habet vtilitatem) quæ in id tempus seruabimus, dum integrum Euclidem offeramus.

Sit itaq; Circulus ABA, cuius Centrum C, & Diameter AB: Sitq; linea recta DE, Circulum tangens in A puncto. Tum inter duo puncta C & B, Diametri, suscipiantur plura Centra (ac nunc quatuor suscepisse satis sit) H, K, L, M: super quibus describantur quatuor Circuli, ANA, APA, AQA, & ARA, transeuntes inter DE rectam & ABA peripheriam, seq; inter se tangentes interiùs in A puncto.



Et manifestum est, horum quatuor Circulorum peripherias paulatim &, vt nouè loquar, punctuatim propiores fieri ipsi rectæ DE. Sumatur igitur punctum S in peripheria AN, proximè A punctum. Pòst in peripheria AP ponatur aliud punctum, quod propiùs accedat ad ipsam DE quàm punctum S: quod quoniam sua nota commodè signari non potest, vocetur punctum secundum. Sit deinde in peripheria AQ, aliud punctum, quod propius sit ipsimet DE, quàm punctum secundum: dicaturq; punctum tertium. Demùm in peripheria AR, sit punctum propiùs accedens ad eandem DE quàm tertium: atq; hoc nominetur punctum quartum. Sicq; continuè, si intelligantur Circuli duci per contactum A, prioribus maiores, quorum Centra in AB linea: eorumq; puncta singillatim propiora lineæ DE. Tandem per hæc puncta, nempe primum, secundum, tertium, & quartum, & si qua essent plura, ducatur linea ST. Quam manifestum est paulatim semper accedere ad DE, non secùs quàm Circulorum puncta per quæ ipsa educitur: & tamen nunquàm coniungi posse cum ipsa DE: etiam si lineæ infinitè protrahantur, scilicet si infiniti ducantur Circuli. Quotquot enim ducentur, in vnico puncto A tangent lineam DE: ex hac Decimaquinta. Constat igitur lineam ST, vtcunque accedat ad lineam DE, cum ea tamen nunquam conuenire posse. Atque hoc idem intelligi volo in alteram partem de linea VX.

At dices, Video quidem Circulos omnes vnico sui puncto tangi à recta linea DE: ac propterea lineam ST infinitè protractam per puncta Circulorũ, concurrere cum DE non posse. Sed tamen mirari non desino qua nam ratione id fiat. Sanè ratio Geometrica admirationem tollit: facitq;, vt magis mirum non sit de linea quàm de Circulis ipsis. Totum igitur ad Circulum refertur, modis omnibus mirabilem. Tam enim mirum videri debet propiùs intuenti, peripherias Circulorum, vt hîc AB, AN, AQ, & AR, semper remoueri, longiusq; discedere à puncto A: & tamen suo ipsarum ductu in ipsum A redire: quàm lineam ST ad rectam AD semper accedere, eam tamen nunquàm attingere. Ob id mixta linea dici debet ex recto & Circulari: ac proptereà inter vtrunque perpetuò consistit. Desinet igitur mirari, qui Circuli formam, rationem, naturam, & constructionem perpenderit. Atque eiusmodi Lineæ constant infinitis lineis in se quodammodo recuruis seu refractis. Sed quum Circuli per A ducti, omninò contigui propter infinitatem intelligantur: hoc loco ST vix aliter sensui quàm pro vnica linea obiicitur. Neque dubium est quin ipsa ex earum sit genere quas ex Apollonio proponunt (ac tale est in Solidis latus Hyperboles, vt illîc docebimus): at certè nullo modo recta, quod putabat Calcagninus: sed linea quædam anormis, cuius non sit mirum neutram esse naturam. Verùm nos hæc ad Corporum materiam reponimus, vt ad Circulos reuertamur.

PRO

PROBLEMA 2, PROPOSITIO XVI.
Theoni 17.

A puncto extrà Circulum signato, lineam ad Circuli contactum ducere.

Sit punctum A extra Circulum B C D, cuius Centrum E, volo à puncto A, ad Circulum B C D, lineam contingentem ducere.

Ab ipso E Centro ad punctum A, duco rectam E A, secantem Circulum in puncto D. Tum super eodem Centro E, secundùm interuallum E A, describo Circulum A F G. Et à puncto sectionis D, excito D F perpendicularem, quę secet Circulum exteriorem in F. Et connecto E F, secantem Circulum interiorem in B. Ac postremò connecto A B. Dico A B esse quæ contingit Circulum B C D.



Sumptis enim duobus Triangulis A E B & F E D, erunt duo latera A E & E B illius, æqualia duobus F E & E D huius: & angulus E vtrique communis. Basis igitur A B, per quartam Primi, basi F D æqualis: & angulus E B A, angulo E D F. Sed angulus E D F rectus: quapropter & E B A rectus. Quare, per Consectarium antecedentis, A B linea contingit B C D Circulum, Quod erat demonstrandum.

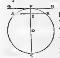
SIC quoque demonstrabimus, exercitationis gratia. Ducta linea A E, inuestigo quantùm possit A E suprà E D: per ea quæ demonstrauimus ad quadragesimamseptimam Primi: & sit linea F G, potentia A E supra E D. Iam verò ex A E linea data, & ex duabus quæ sint ipsis E D & F G datis æquales, conficio Triangulum A B E per vigesimamsecundam Primi. Et E B omninò desinet in peripheriam, ex definitione Centri: Eritq; angulus A B E rectus per vltimam Primi. Quare A B continget Circulum: per Consectarium antecedentis, Quod erat probandum.



Lineæ rectæ quæ Circulum secet, lineam rectam quæ Circulum tangat parallelum ducere.

Sit linea A B, secans Circulum A B C, cuius Centrum D, in punctis A & B. Volo ipsi A B parallelum ducere, quæ tangat Circulum.

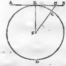
Diuido A B bipartitò in puncto E. Tum per E punctum & per Centrum D, duco Diametrum C D E F. Duco postmodùm G F H lineam ad angulos rectos ipsi G F Diametro. Dico G F H, quæ, per Consectarium decimæquintæ, tangit Circulum, esse ipsi A B parallelum.



Nam quum recta C F in vtranq; cadens, faciat omnes angulos qui ad E rectos, per tertiam huius: sintq; duo anguli qui ad F positi recti: erunt A B & G H paralleli, per vigesimamnonam Primi, Quod erat demõstrandum. Hæc ad Figuras Circulis inscribendas percommoda.

THEOREMA 15, PROPOSITIO XVII.
Theoni 18.

Si recta linea Circulum tangat: à Centro ad contactum ducta recta linea, erit tangenti perpendicularis.



Sit linea A B, tangens Circulum C E D, cuius Centrum F, in puncto E. Et à Centro F ducatur linea F E. Hanc dico esse perpendicularem ad A B.

Quæ si non fuerit: sit F G ad A B perpendicularis, secans peripheriam in C. Quumq; angulus E G F sit rectus: erit in Triangulo E F G, latus E F maius latere F G, per Decimamnonam Primi: Quod est falsum, quum sit F C ipsi F E æqualis. Probatur hæc à negatione, in modum Conuersarum. Est enim Conuersa Consectarij Decimæquintæ huius.

THEOREMA 16, PROPOSITIO XVIII.

Theoni 19.

Si Circulum recta linea tangat: à contactu perpendicularis deducta, per Centrum transit.



Sit linea A B tangens Circulum C D E A in puncto C: A quo demittatur C E perpendicularis ipsi A B, ad punctum E peripheriæ. Dico C E transire per Centrum.

Sin aliter: sit Centrum extra ipsam C E, vt in F puncto: A quo ad punctum C, ducatur F C: quæ, per antecedentem, erit perpendicularis ad A B: ob id, angulus A C F æqualis angulo A C E, pars toti, Quod est absurdum.

THEOREMA 17, PROPOSITIO XIX.

Theoni 20.

In Circulo, angulus qui ad Centrum duplus est eius qui ad peripheriam, quum vterque super eandem peripheriæ portionem constiterit.

In Circulo A B C, cuius Centrum D, sit angulus A D C ad Centrum, angulus verò A B C ad peripheriam: quorum vterque super eandem peripheriæ portionem A C consistat. Dico angulum A D C duplum esse anguli A B C.

Aut enim neutra duarum A B & C B, neutram secat duarum A D & D C: Aut altera illarum, alteram harum: Aut denique altera harum, in altera est illarum. Ac primò neutra duarum A B & C B, neutrã secet duarum A B & C D. Tum per punctum D ducatur linea B D E. Eritq;, per trigesimamsecundam Primi, angulus A D E æqualis duobus angulis A B D & B A D, interioribus oppositis. Qui quũ sint æquales, per quintam eiusdem, erit ipse A E D duplus anguli A B D. Eadem ratione erit angulus C D E duplus anguli C B D. Totus igitur A D C duplus est totius A B C, Quod fuit ostendendum.



Quòd si altera illarum, vt A B, secet alterã harum, vt C D: tum producta B E, fiet angulus E D C duplus anguli D B C, per trigesimamsecundam Primi. Dempto igitur E D A, qui duplus est anguli D B A, à toto E D C: demptoq; D B A à toto D B C: erit reliquus A D C, reliquo A B C duplus, Quod erat probandum.



Si verò altera harum, vt A D, sit in altera illarum, vt A D B sit linea vna: tum angulus A D C manifestò erit duplus anguli B, per quintam & trigesimamsecũdam Primi, Quod erat demonstrandum.



H o c loco annotauit Nicolaus Tartalea sequentem appendicem. Quam nos in Theorema redegimus: & aliquanto breuiùs demonstrauimus ex hac Decimanona.

Si

Si fuerint duo anguli, quorum vnus ad Centrum, alter ad peripheriam, & ambo vna recta linea subtendantur: erit spatium circa angulum qui ad Centrum, comprehensum, duplum anguli qui ad peripheriam.

Maneat angulus A D C, vt modò, ad Centrum: & constituatur ad peripheriam A B C, angulus eiusdem appellationis A B C. Et per Centrum D ducatur linea B D E secans peripheriam in puncto E. Dico duos angulos A D E & C D E simul sumptos, duplos esse ad angulum A B C.



Id verò patet ex hac ipsa Decimanona. Nam A D E angulus ad Centrum, duplus est anguli A B D: quum sint super eandem peripheriam A E. Eadem ratione, C D E duplus est ipsius C B D. Quare duo anguli A D E & C D E simul sumpti, dupli sunt ad totum A B C angulum, Quod erat ostendendum.

THEOREMA 18, PROPOSITIO XX.

Theoni 21.

In Circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, inter se sunt æquales.



In segmento A D B, Circuli A B C D, cuius Centrum F, sint anguli A C B, A D B & A E B. Dico omnes esse æquales.

Connectatur A B. Ac tum si duæ linearum aliquæ se in Centro secent: erit manifesta propositio ex antecedente. Erit enim angulus A F B, duplus ad vnumquenque illorum: quapropter, ex animi Notione, ipsi inter se æquales. Quòd si DOD se secuerint, tum ductis AB & B F, idem statim innotescet.



Si verò fuerint in minori segmento, vt in A E B: tum connexis A F & B F: atque item ductis lineis ab vnoquoque angulorum, per Centrum, ad peripheriam (hîc verò satis fuerit duxisse E F G:) erit totum spatium circa angulum F, duplum ad vnumquenque illorum. Quare ipsi inter se æquales, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 19, PROPOSITIO XXI.

Theoni 22.

Quadrilaterotum in Circulis inscriptorum, duo anguli inter se oppositi, duobus rectis sunt æquales.

Sit Quadrilaterum A B C D, in Circulo eiusdem designationis, A B C D inscriptum. Dico binos quosque angulos oppositos, duobus rectis esse æquales.



Ducantur in Quadrilatero duæ lineæ dimetientes, A C & B D. Eruntq́;, per antecedentem, duo anguli A B D & A C D, qui in eodem segmento A B D, æquales: Duo itidem C B D & C A D, qui in eodem segmento B D C, æquales. Totus itaque B angulus, duobus A C D & C A D æqualis. At duo ipsi A C D & C A D cum toto D, sunt duobus rectis æquales, per trigesimamsecundam Primi. Sunt igitur duo B & D, anguli oppositi, duobus rectis æquales. Eadẽ argumẽtatione probabimus duos A & C oppositos, duobus rectis esse æquales.

THEOREMA 20, PROPOSITIO XXII.

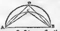
Theoni 23.

Super eadem recta linea, duæ Circulorum sectiones similes

inæquales

inæquales ad eandem partem constitui non possunt.

Sit recta linea A B, super qua constituta sit Sectio A C B : & ducantur rectæ A C & B C. Dico super eadem A B non posse constitui ex eadem parte similem Sectionem Circuli, inæqualem.



Si enim fieri possit, constituatur A D B Sectio maior. Et ducantur rectæ A D & B D. Aut igitur neutra duarum A D & B D, neutram secabit duarum A C & B C. Ac tum erit angulus C maior angulo D, per vigesimamprimam Primi. Non igitur erunt Sectiones similes, ex Definitione vltima huius.



Quòd si altera harum, vt B D, secet alteram illarum, vt A C, & peripheriam minorē in puncto E : connectatur E A. Eritq́, per decimamsextam Primi, angulus A E B maior angulo A D B, exterior interiori. Ob id & A C B, qui æqualis est A E B, per vigesimam huius, maior eodem A D B. Quare nec sic Sectiones similes.



Si demùm altera illarum, vt A C, sit pars alterius harum, vt ipsius A D : erit & per eandem decimamsextam Primi, angulus C maior angulo D. Non igitur sunt similes Sectiones.

Ex his verò satis constat, minorem Sectionem super A B constitui non posse ipsi A C B similem. Quare nullo modo similes inæquales Sectiones super eadem linea constitui possunt, Quod erat demonstrandum.

Hic subiecit Campanus, Super eadem recta linea, neque ad eandem partem neque ad oppositam, similes Sectiones inæquales constitui posse. Quod ipse probat ex superpositione, quam vocant, Figurarum. Id verò alia ratione demonstrabimus.

Sit Circuli portio A B C (seu Sectio, nihil facio discriminis) constituta super A C lineа. Ex altera verò parte constituatur portio A D C super eadem A C, ipsi A B C similis. Dico A B C & A D C sic non posse esse inæquales. Sit enim, si possit, maior A D C : & diuidatur A C bifariam in puncto E : & ducatur recta B E D, secans ad rectos angulos ipsam A C : Et connectantur A B, C B : A D, & C D.



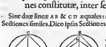
Et quoniam maior est A D C portio quàm A B C : maior quoque erit perpendicularis E D quàm E B, vt præmonstrauimus ad calcem Definitionum huius Tertij. Resecetur ergo E D ad æqualitatem E B : & sit E F æqualis E B. Eritq́, Triangulum A E B æquale Triangulo A E F, per quartam Primi : Et angulus E B A æqualis angulo E F A. Ac simili ratione, per eandem, erit angulus E B C æqualis angulo E F C. Totus igitur A B C toti A F C æqualis. Sed ipse A F C, per vigesimamprimam Primi maior est ipso A D C. Igitur & A B C maior quàm A D C. Quare, à Definitione, ipsæ A B C & A D C portiones, non sunt similes, Quod est contra positionem. Non sunt igitur similes & inæquales, Quod erat probandum.

THEOREMA 21, PROPOSITIO XXIII.

Theoni 24.

Super æqualibus rectis lineis, similes Circulorum Sectiones constitutæ, inter se sunt æquales.

Sint duæ lineæ A B & C D æquales : ac super iisdem constitutæ duæ A B C & C D E Sectiones similes. Dico ipsas Sectiones esse æquales.



Sin minus, Altera illarum alteri superposita, excedet maior minorem. At linea A B est vna linea cum C D. Vnde accidet contra præceptum antecedentis.

Sed

SED quia banc Figurarum superpositionem iandudum à Geometricis Demonstrationibus explodendam esse censuimus: quanuis boc Tbeorema nulla ferè alia probatione egeret, quàm antecedens: tamen hac ratione Geometrica demonstrabimus.

Quoniam duæ ACB & CED portiones, sunt similes, sed non æquales: sit maior CED. Et diuidantur duæ AB & CD lineæ bifariam: AB quidem in F, & CD in G puncto: Et erigantur duæ perpendiculares FC & GE. Et quia CED portio, maior est: erit quoque GE perpendicularis maior: vt ad finem antecedentis astruximus. Secetur itaque GE in H, vt sit GH æqualis FC. Et quoniam duo latera AF & FC, Trianguli ACF, sunt æqualia duobus CG & GH, Trianguli CHG: & anguli F & G æquales: erit quoque basis AC, basi CH æqualis: & angulus ACF angulo CHG, per quartam Primi. Similiter erit angulus BCF, angulo DHG æqualis. Quapropter totus angulus ACB, toti angulo CHD æqualis. Sed CHD angulus, maior est CED angulo, per vigesimamprimam Primi. Igitur & ACD angulus maior CED angulo. Quare Sectiones non sunt similes, Quod est contra positionem.

PROBLEMA 3, PROPOSITIO XXIIII.

Theoni 25.

Circuli sectione data, Circulum perficere cuius est sectio.

Sit Sectio data AB, ex qua sit perficiendus Circulus.



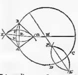
Ducam in ipsa duas lineas fortuitas AC & BD: quas diuidam bifariam: AC quidem in puncto E, & AD in puncto F. Tum à duobus punctis diuisionum, ducam intra Sectionem duas perpendiculares EG & FH: quæ se scindant in puncto K. Eritq; Centrum Circuli in vtraque ipsarum, per Consectanum primæ huius. Igitur K Centrum, Quod erit inuestigandum.



Si verò EG & FH non secent inter se, sed sint linea vna, vt GH, in secunda Figura: quod fit, quum duæ AC & BD sunt æquidistantes: tunc GH applicata ad vtranque partem peripberiæ datæ, capiet Centrum Circuli, per idem Consectarium. Neque enim æquidistantes esse poterunt EG & FH. Essent enim eiusdem peripheriæ duo Centra.

HÆC est generalis Demonstratio perficiendi Circuli, quocunq; arcu dato: quam & adscribit Campanus. Ex qua deprompta est ratio illa compendiaria Centri inueniendi, Artificibus vulgò vsitata.

Sit enim peripheria ABCD, cuius Centrum sit reperiendum. Pono Centrum fortuitũ in puncto aliquo datæ peripberiæ, vt in A: super quod describo peripheriã liberæ extensionis, quæ sit EFG. Tum in puncto altero peripheriæ, vt in B, posito Centro, describo peripheriam eodem interuallo quo priorem, EHG: quæ secet EFG priorem, in duobus punctis E & G. Duco postmodùm ab ipsis Centris, rectas AE & BE: itemq; AG & BG. Suntq; hæ quatuor postremæ lineæ æquales: quum sint Semidiametri Circulorum æqualium. Tum duco AB rectam: Eientq; duo Triangula Isoscelia AEB & AGB: quorum basis communis AB. Hanc igitur AB diuido bipartitò in puncto K: Quod omninò cadet intra duas peripherias EFG & EHG: ne sit pars maior toto. Et connecto EK: quam produco ad G punctum. Vides iam duo Isoscelia diuisa esse in quatuor Triangula EAK, EBK: GAK, & GBK æqualia. Duo enim latera AE & AK, Trianguli AEK, sunt æqualia duobus BE & BK, Trianguli BEK: & basis EK vtriq; comm

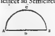


communis. Duo igitur anguli qui ad K, duorum Triangulorum AEK & BEK, per octauam Primi, sunt æquales: ob idq́, recti. Eadem ratione erunt duo reliqui anguli qui ad K recti. Quapropter EG linea vna, per decimamquartam Primi. Quæ quum diuidat AB ad angulos rectos: ipsa exit ad Centrum, per Consectarium primæ huius. Atque eadem erit probatio duarum peripheriarum similiter ductarum ac se scindentium in punctis L & M: è quibus educta linea LM, secabit lineam EG in puncto N. Quod erit Centrum Circuli, per ipsum primæ huius Consectarium: intellecta CD recta linea, ipsam LM ad angulos rectos secante, Quod erat probandum.

HANC demonstrationem apposui, vt videret vnusquisque quantum compendij fieri possit eorum quæ in arte fusè docentur. Id verò totum à Quadrati cum Circulo commercio proficiscitur. Triangula enim ad Quadrilaterorum probationem conferunt. Quadrilatera verò, sed præcipuè Quadrata, ad Circulos accommodantur.

Vt hic, si intelligamus AEBG Quadratum: cuius vna Diameter AB peripheriam datam secat: altera EG, Centrum respicit. Sed hæc præter Demonstrationem.

Quæ verò sequuntur Demonstrationes, hanc Euclidis vigesimamquartam probant per capita: hoc est, ad nominatas Circulorum portiones singillatim pertinent: scilicet ad Semicirculum, portionesq́, Semicirculo maiores aut minores.



Primùm itaque Semicirculo dato, cuius sit Centrum inueniendum: quia linea ipsum subtendens est Diameter: in ipsius puncto medio erit Centrum Circuli: quale hoc loco est punctum D in Diametro AB, Semicirculi ACB.

Sed sit data portio Semicirculo maior, vt ACB, cuius subtensa AB. Diuido AB æqualiter in D puncto: à quo excito perpendicularem DC, quæ attingat peripheriam in C. Atque hæc transibit per Centrum, ex Consectario primæ huius. Tum



connecto AC. Et quia angulus CAD maior est angulo ACD, per decimamnonam Primi, quum CD maior sit Semidiametro, & AD multò minor: rescindo angulum CAE, æqualem angulo DCA, per vigesimamtertiam Primi, ducta linea AE, quæ secet DC in puncto E. Dico E Centrum esse Circuli.

Connecto EB. Et constat, ex sexta Primi, EC & EA esse æquales: quum duo anguli EAC & ECA sint æquales: item, per quartam eiusdem, EA & EB esse æquales: quum duo latera AD & DE, Trianguli AED, sint æqualia duobus lateribus DB & DE, Trianguli DEB. Tres igitur EA, EB, & EC sunt æquales. Quare, per sextam huius, erit E Centrum Circuli.

Iam verò detur ABC portio, minor Semicirculo. Huius subtensam AC diuido æqualiter in puncto D. Et per ipsum D, duco ad angulos rectos lineam BDE: In qua



quidem erit Centrum Circuli, per Consectarium sæpe citatum: sed non inter puncta DB: esset enim ABC maior Semicirculo, contra positionem. Connecto igitur BA: & ab A puncto duco lineam, quæ cum BA faciat angulum æqualem angulo ABF, per vigesimamtertiam Primi: sitq́, illa AF: scilicet angulus FAB sit æqualis angulo FBA: (Neque enim cadet vt AG, inter D & B. Ducta enim GC, essent, ex sexta & quarta Primi, tres GA, GB, & GC, æquales: essetq́; G Centrũ Circuli, per sextam huius, quod modo improbatum est.) Connecto itaque FC. Atque eadem, qua paulò antè, argumentatione, erunt tres FA, FB, & FC æquales. Quare F Centrum Circuli, Quod erat demonstrandum.

ATQVE eæ inueniendi Centri Demonstrationes, commendationem quandam habent varietatis, sed vsum parum necessarium. Prima enim omnes abundè supplet.

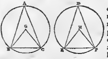
THEO

THEOREMA 22, PROPOSITIO XXV.

Theoni 26.

In Circulis æqualibus, qui ad Centrum quiq; ad Peripheriam sunt æquales anguli, ii super æquos Arcus consistunt.

Sint duo Circuli æquales : A B C, cuius Centrum G, & D E F, cuius Centrum H: sintq́, ad Centra duo anguli A G C & E H F æquales: aut ad Peripheriam duo B A C & E D F æquales. Dico Arcum B C æqualem esse Arcui E F.



Connectantur B C & E F. Et quoniam Circuli sunt æquales: erunt G B & G C Semidiametri, æquales duabus H E & H F, per definitionem æqualium Circulorum. Quapropter quum duo G & H anguli sint æquales: erit, per quartam Primi, basis B C, basi E F æqualis. Quumq́; angulus A sit æqualis angulo D: erit Segmentum B A C simile Segmento E D F, per definitionem Similium portionum. Et quia super æquales lineas cõsistunt: ipsa erunt æqualia, per vigesimamtertiam huius. Quare, ex communi Notione, duo reliqui Arcus B C & E F sunt æquales, Quod erat demonstrandum.

COMMODIVS tamen probabimus separatim, vt Campanus. Ponantur enim vt priùs, duo anguli ad Centra, æquales. Ac tum connexis B C & E F, erunt, propter æqualitatem Semidiametrorum, ipsæ B C & E F æquales, per quartam Primi Ducantur itaque B A & C A ad Peripheriam: itemq́; E D & F D. Et erunt duo anguli A & D, per decimamnonam huius & animi Notionem, æquales. Igitur, per definitionem Similium Segmentorum, erunt duo Segmenta B A C & E D F similia: ob idq́;, per vigesimamtertiam huius, æqualia: quum sint super æquales lineas. Quare duo reliqui Arcus B C & E F æquales, Quod est prius.

Iam verò ponantur A & D anguli ad Peripheriam, æquales. Et erunt, ex definitione, Segmenta æqualia. Ac tum ductis G B & G C: itemq́, H E & H F: erunt ipsi G & H anguli, per decimamnonam huius & animi Notionem, æquales. Et quia Semidiametri sunt æquales: erunt, per quartam Primi, duæ B C & E F æquales. Erunt itaque, vt priùs, Segmenta B A C & E D F æqualia, per vigesimamtertiam huius. Quare duo reliqui Arcus æquales, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 23, PROPOSITIO XXVI.

Theoni 27.

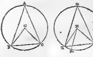
In Circulis æqualibus, qui super æquos Arcus consistunt anguli, siue ad Centra, siue ad Peripherias consistant, inter se sunt æquales.



Sint duo Circuli æquales, A B C, cuius Centrum G: & D E F, cuius Centrum H: sintq́; duo anguli G & H ad Centra: vel duo A & D ad Peripheriam, ac super duos Arcus æquales B C & E F. Dico angulum G, esse æqualem angulo H: & angulum A, angulo D. Hæc est Conuersa antecedentis.

Si enim G non est æqualis H, sit H maior:

h fiatq;



fiatq; FHK æqualis ipsi G. Ac tum, ex antecedente, erit Arcus FK æqualis Arcui BC: Quapropter & Arcui EF, pars toti. Atque idem proueniet absurdum, si positis BC & EF Arcubus æqualibus, non fuerint A & D anguli ad Peripheriam, æquales.

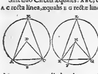
VEL sic, Quum probati fuerint G & H anguli æquales, tum ductis BA & CA, itemq; ED & FD: erunt A & D anguli æquales, ex decimanona huius & animi Notione, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 24, PROPOSITIO XXVII.

Theoni 28.

In Circulis æqualibus, æquales rectæ lineæ æquos Arcus abscindunt: & maior linea, maiorem Arcum: minor verò minorem.

Sint duo Circuli æquales: ABC, cuius Centrum D: & EFG, cuius Centrũ H: Sitq; AC recta linea, æqualis EG rectæ lineæ. Dico duos Arcus ABC & EFG esse æquales.



Quòd si EG sit maior, maiorem etiam esse Arcum EFG.

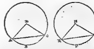
Connectantur AD & CD ad Centrum: vel AK & CK ad Peripheriam: ac similiter EH, GH: & EL, & GL. Et quia Semidiametri vtrinque sunt æquales, & bases itidem æquales: erunt, per octauam Primi, duo anguli D & H æquales: Ob idq;, per antecedentem, Arcus ABC æqualis Arcui EFG, Quod est prius.

At si EG linea ponatur maior: erit quoq; angulus H maior, per vigesimamquintam Primi. Facto itaq; angulo FHG æquali ipsi D: erit Arcus FG æqualis Arcui ABC, per vigesimamquintam huius. Maior igitur EFG ipso ABC, Quod erat probandum.

THEOREMA 25, PROPOSITIO XXVIII.

Theoni 29.

In Circulis æqualibus, sub æquis Arcubus æquales rectæ lineæ subtenduntur.



Sint duo Circuli æquales: ABC, cuius Centrum D: & EFG, cuius Centrum H: sitq; Arcus ABC æqualis Arcui EFG. Dico lineam AC esse æqualem lineæ EG. Conuersa antecedentis.

Connectantur DA & DC: itemq; HE & HG. Eruntq;, per vigesimamsextam huius, anguli D & H æquales. Quare, per quartam Primi, erit AC æqualis EG, Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA 4, PROPOSITIO XXIX.

Theoni 30.

Datum Circuli Arcum bifariam diuidere.

Sit

Sit datus Arcus ABC, cuius subtensa AC. Hunc volo bifariam diuidere.



Secetur AC æqualiter in puncto D. A quo erigatur perpendicularis DB, secans datum Arcum in B. Hanc dico esse quæ diuidit Arcum ABC per æqualia in puncto B.

Connectantur BA & BC: quæ, per quartam Primi, erunt æquales: Quapropter, ex priori parte vigesimæseptimæ huius: erit Arcus AB æqualis Arcui BC, Quod fuit demonstrandum.

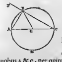
THEOREMA 26, PROPOSITIO XXX.

Theoni 31.

Qui in Semicirculo est angulus, rectus est: Qui verò in maiori Segmento, minor recto: Et qui in minori, maior, Sed angulus maioris Segmenti Mixtus, recto maior: minoris autem, minor.

Sit in Circulo ABCD, cuius Centrum E, Diameterq; AC, Semicirculus ABC: in quo sit angulus B rectilineus, eiusdem designationis ABC. Dico hunc esse rectũ.

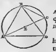
Connectatur B cum Centro, ducta linea EB. Eritq;, per quintam Primi, angulus A æqualis angulo EBA: & angulus EBC, angulo ECB: quapropter duo anguli qui ad B, æquales duobus angulis A & C. Atqui totus B angulus cum duobus A & C, sunt duobus rectis æquales, per trigesimamsecundam Primi. Quum igitur B sit eorum dimidium: ipse B est rectus.



Vel, vt alij, Quia angulus CEB æqualis est duobus A & EBA, per priorem partem trigesimæsecundæ Primi: ipse erit duplus ad angulum EBA: Itidem AEB duplus erit ad EBC. Duo igitur anguli qui ad B, dupli sunt ad totum B. Quare B est dimidia pars duorum rectorum, ac proptereà rectus.

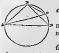
Vel rursus sic. Protrahatur CB ad F punctum. Et quia duo anguli qui ad B, Trianguli ABC, sunt æquales duobus A & C, per quintam Primi: & angulus ABF ijsdem A & C æqualis, per trigesimamsecundam eiusdem: erunt duo ABF & ABC æquales. Quare vterque rectus, per decimamquintam Primi.

Mira Diametri Potentia: vt semper æqualis sit duabus quas coniungit potentijs.



Sit deinde in Circulo ABCD, cuius Centrum E, portio ABD maior Semicirculo: eiusq; subtensa, recta AD: super quam angulus rectilineus ABD. Hunc dico esse minorem recto.

Sumatur Diameter AC: & connectatur BC. Et quia angulus ABC, vt modò ostendimus, rectus est: erit, ex animi Notione, ABD angulus, minor recto.



Sed sit portio ABC, cuius subtensa AC, minor Semicirculo. Dico angulum ABC maiorem esse recto.

Ducatur Diameter AD: & connectatur BD. Et erit, ex primo capite huius, ABD (pars ipsius ABC) rectus. Quare ABC recto maior.

Demùm in Circulo ABCD sit portio ABC, cuius subtensa AC, maior Semicirculo: portio verò ADC, cuius subtensa eadem AC, minor eodem. Dico angulum Mixtum, scilicet qui ab Arcu CBA & recta AC comprehenditur, maiorem esse recto: sed angulum ab Arcu CDA eademq;

linea A C comprehensum, minorem esse recto.



Ducatur Diameter B C: & producatur recta B A ad E punctum. Eritq́, per primam partem huiusce, angulus rectilineus B A C, rectus: Et, per decimamtertiam Primi, angulus C A E rectus. Quare, quum angulus rectus sit pars prioris, alter verò pars recti: erit ille recto maior, hic autem minor. Quod fuit probandum.

SED & hanc Propositionem omni ex parte spectandam exhibuimus, sub hac Descriptione.

Sit Circulus A B C, cuius Centrum D, Diameter verò B C. Atque in eo ponatur E A F portio Semicirculo minor: & G A H portio, eodem maior; Et à punctis B, C: E, F: G, H, ducantur lineæ ad punctum A, vt in Schemate.



Eritq́, de angulo B A C Demonstratio eadem quam suprà dedimus: Ex qua cæterorum angulorum probationes erunt manifestæ.

Quoniam enim duo anguli D A C & D C A sunt æquales, per quintam Primi: itemq́, duo D A B & D B A æquales, per eandem: erit totus B A C æqualis duobus B & C: Atqui totus B A C cum duobus B & C, sunt duobus rectis æquales, per trigesimamsecundam Primi. Totus igitur B A C rectus.

Hinc satis manifestum est, E A F angulum esse recto maiorem: sed G A H minorem eodem. Hincq́, angulum Mixtum, qui fit ex linea recta A C & Arcu C H A, esse recto maiorem: Angulum autem qui fit ex eadem A C & Arcu C F A, esse recto minorem, Quod fuit probandum,

Huic tanquam Consectarium subijciemus.

Si in Circulo Triangulum Rectangulum inscriptum fuerit: latus recto angulo oppositum, Diameter erit Circuli.

Sit enim in Circulo A B C D, Triangulum A B C Rectangulum, cuius angulus B rectus. Dico latus A C esse Diametrum Circuli.



Sin aliter: erit Centrum extra A C, vt in puncto E. Et connectatur A E: quæ educatur ad punctum D Peripheriæ, oppositum: sitq́; A E D Diameter: & connectatur B D. Tum angulus A B D, per hanc trigesimam, erit rectus: sicq́; æqualis angulo A B C, pars toti, Quod est absurdum. Sed nec alibi erit Centrum, quàm in A C. Est igitur A C Diameter, Quod erat probandum.

THEOREMA 27, PROPOSITIO XXXI.

Theoni 32.

Si Circulum tetigerit recta linea, à contactu autē exiens altera linea, Circulum secuerit: anguli quos cum tangente efficit, æquales sunt alternatim duobus qui in Circuli Segmentis sunt angulis.

Sit linea A B, tangens in puncto C Circulum C D E F, cuius Centrum G. Et à puncto C ducatur linea C F, secans Circulum: fiatq́; super C D E portione, angulus D, ductis lineis C D & C F: Itemq́, angulus F super portione C F E, ductis C F & E F. Dico angulum E C B esse æqualem angulo D: angulum verò E C A, æqualem angulo E F C.

Ducatur Diameter C G H: & connectatur E H. Eritq́, per decimamseptimam huius,



ius, CH perpendicularis ipsi AB: Et, per primam partem antecedentis, angulus DEH rectus: ob idq́, angulo ACH æqualis. Posito itaque communi ECH, erit angulus ACE, duobus CEH & ECH æqualis. At hi duo cum angulo H, per trigesimamsecundam Primi, duobus rectis sunt æquales: Et, per decimamtertiam eiusdē, angulus ACE cum angulo BCE, duobus rectis sunt æquales. Angulus igitur BCF, angulo H æqualis: ob id, & angulo D, per vigesimam huius: quum sint vna portione Circuli.

VEL breuiùs. Angulus CEH est rectus, per antecedentem: quapropter duo anguli H & ECH faciunt vnum rectum per trigesimamsecundam Primi. Quum igitur BCE & ECH faciant vnum rectum, dempto communi ECH, erit BCE ipsi H æqualis: Quare & ipsi D, per vigesimam huius, Quod est prius.

Quumq́, D & F sint duobus rectis æquales, per vigesimamprimam huius: erit angulus F æqualis angulo ACE, Quod erat probandum.

VEL sic, angulus ACE cum angulo H sunt duobus rectis æquales, vt ostendimus: & BCE cum H itidem duobus rectis æquales, per vigesimamprimam huius: quorum BCE est ipsi H æqualis. Angulus igitur E ipsi ACE est æqualis, Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA 5, PROPOSITIO XXXII.

Theoni 33.

Super data linea Sectionem Circuli describere, quæ capiat angulum angulo dato æqualem.



Sit linea data AB: datus verò angulus C. Volo super linea AB describere Circuli Sectionem, quæ capiat angulum æqualem angulo C.

Ac primùm, si fuerit angulus C rectus, descripto Semicirculo ADB super linea AB, ductisq́, AD & BD: erit angulus D rectus, per primam partem trigesimæ huius.

Si verò fuerit obtusus, ducam lineam DA, facientem cum AB, angulum DAB, æqualem angulo C obtuso, per vigesimamtertiam Primi. Et à puncto A, ducam super AD, perpendicularem AE interminatam. Tum à puncto B, versus AE ducam lineam BF, secantem AE in puncto F: quæq́, cum AB constituat angulum ABF, æqualem angulo EAB, quo obtusus rectum superat.

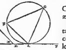


Eruntq́, per sextam Primi, AF & FB æquales. Posito itaque puncto F Centro, describo, secundum spatium FA & FB, Circulum AGBA. Et, per Consectarium decimæquintæ huius, linea DA tanget Circulum. Duco itaque AG & BG, constituentes angulum G: qui, per antecedentem, erit æqualis angulo DAB: quapropter angulo C obtuso.

Iam verò si angulus C fuerit acutus: ducam AH lineam, quæ contineat cum AB angulum HAD æqualem angulo C acuto. Tum à puncto A, ducta perpendiculari AE, facio angulum ABF æqualem angulo BAE, quo rectus superat acutum: vt BF secet AE in F puncto. Ac tum, vt in superiori schemate, erunt FA & FB æquales, per sextam Primi: Eritq́; F Centrum Circuli describendi. Inde ductis ad maiorem portionem lineis AK & BK: erit angulus K, per antecedentem, æqualis angulo BAH: Quare & angulo C dato, Quod erat faciendum.

PROBLEMA 6, PROPOSITIO XXXIII.
Theoni 34.

A dato Circulo ſegmentum abſcindere, capiens angulum dato angulo rectilineo æqualem.



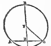
Sit Circulus datus A B C, datus verò angulus D. Volo à Circulo A B C abſcindere ſegmentum, capiens angulum æqualem angulo D.

Duco lineam E F, quæ, per decimamſeptimam huius, tangat Circulum in A puncto: A quo intra Circulum duco lineam A B, quæ cum A E faciat angulum E A B æqualem angulo D, per vigeſimamtertiam Primi. Ac tum ductis lineis A C & B C, erit angulus C in ſegmento A C B, æqualis angulo E A B, per trigeſimamprimam huius: Quare & angulo D dato, Quod fuit faciendum.

THEOREMA 29, PROPOSITIO XXXIIII.
Theoni 35.

Si in Circulo duæ rectæ lineæ ſe inuicem ſecuerint: quod fit ex ſegmentis vnius, Rectangulum, æquum eſt ei quod ex alterius ſegmentis fit, Rectangulo.





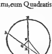
Sint in Circulo A B C D, duæ lineæ A C & B D, ſecantes ſe in puncto E. Dico id quod fit ex A E in E C, æquum eſſe ei quod fit ex B E in E D.

Aut igitur vtraque tranſit per Centrum, aut altera tantùm, aut neutra.

Si enim vtraque ſit Diameter Circuli: erit E Centrum & quatuor ſegmenta æqualia: ſicq́; conſtabit propoſitio.

Si verò altera tantùm tranſeat per Centrum, vt B F D: aut ipſa ſecabit A C æqualiter, aut inæqualiter. Quòd ſi æqualiter: ſecabit & ad rectos angulos, per priorem partem tertiæ huius: Tum ducatur F C. Et erit, per quintam Secundi, quod fit ex B E in E D cum Quadrato E F, æquale Quadrato F D: vide & Quadrato F C: ob idq́;, duobus Quadratis E F & E C, per quadrageſimamſeptimam Primi. Dempto igitur vtrinque Quadrato E F: erit quod fit ex B E in E D, æquale Quadrato E C. Quare & ei quod fit ex A E in E C, quum ipſæ ſint æquales, Quod erat probandum.

At ſi B D tranſiens per Centrum, ſecet A C inæqualiter: À Centro F ducatur F G perpendicularis ipſi A C: Et connectatur F C. Eritq́;, per quintam Secundi, quod fit ex B E in E D cum Quadrato E F (ob idq́;, per quadrageſimamſeptimam Primi, cum Quadratis F G & E G) æquale Quadrato F D: atque ob id, Quadrato F C: ob idq́;, duobus Quadratis F G & G C. Ablato ergo vtrinque Quadrato F G: erit quod fit ex B E in E D cum Quadrato G E, æquale Quadrato G C. At, per quintam Secũdi, quod fit ex A E in E C cum Quadrato G E, æquale eſt Quadrato G C. Ablato igitur vtrinq; Quadrato G E, erit quod fit ex B E in E D, æquale ei quod fit ex A E in E C, Quod erat probandum.

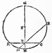


QVONIAM verò hæc Demonſtratio ex iis eſt quæ non expeditè capiuntur: qui in ſimiles incidet, ſtudeat ipſas in ſuos articulos diuidere. Verbi gratia, in hoc poſtremo ſchemate ſic ratiocinetur. Quod

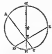
fit ex

fit ex B E in E D cum Quadrato E F, æquale est ei quod fit ex A E in E C cum eodem Quadrato E F. Quod igitut fit ex B E in E D, æquale est, per animi Notionem, ei quod fit ex A E in E C. Assumptio sic probatur. Quod fit ex A E in E C cum duobus Quadratis G E & G F (hoc est, cum Quadrato E F) est æquale duobus Quadratis G C & G F, per quintam Secundi & animi Notionem: ob idq́, Quadrato F C. Sed quod fit ex B E in E D cum eodem Quadrato E F, probatum est æquale Quadrato F C. Quod igitur fit ex B E in E D cum Quadrato E F, æquale est ei quod fit ex A E in E C cum eodem Quadrato E F. Probata Assumptione, consequitur, vt ablato communi Quadrato E F, maneat id quod fit ex B E in E D, æquale ei quod fit ex A E in E C, Quod fuerat demonstrandum.

Iam verò, vt ad Propositionem reuertamur, si neutra linearum transeat per Centrum, siue æqualiter, siue inæqualiter se diuiserint: per punctum sectionis E, ducam Diametrum G H, in qua Centrum F. Ac tum si altera illarum diuidatur æqualiter, vt A C ab ipsa B D: diuidetur quoque ipsa A C æqualiter à Diametro C H: idq́, per tertiam huius, ad angulos rectos. Quapropter, ex secunda specie huiusce Propositionis, quod fit ex G E in E H, æquum est ei quod fit ex B E in E D. Quod igitur fit ex A E in E C, æquum est ei quod fit ex B E in E D, Quod erat probandum.



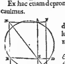
At si neutra alteram æqualiter diuidat: erit ex tertia specie, quod fit ex G E in E H, æquale ei quod fit ex A E in E C: & æquale ei quod fit ex B D in E D. Quare vtrunque æquale alteri. Ac sic constat ex omni parte Propositio.



INTER eas quæ hoc Tertio libro demonstrantur Propositiones, hæc certè vna est ex præcipuis. Vsum enim habet varijs modis notabilem. In quam commentari pro dignitate longum esset. Capita igitur tantummodò aliqua seligemus, vt ex ijs ad alia meditanda viam aperiamus.

Primùm itaque ex hac intueri licet Circuli vim & autoritatem. Qui quum lineas in Centro se scindentes, atque ex his producta æqualia, nempè Quadratas Figuras, in æqualitate contineat: idem iuris etiam retinet in reliquorum punctorum decussationibus. Nam quocunque in loco sese scindant lineæ: partes semper æqualia producta faciunt, vt modò ostendimus. Atque ex hoc multa in Geometriam dispersa sunt Theoremata & Problemata. Inprimis vltima Propositio Secundi, quæ dato Rectangulo æquale Quadratum componit. Si enim attentè inspexerimus secundam, quam in hac descripsimus, speciem: intelligemus Rectangulum compositum ex duobus lateribus B E & E D: quæ in vnam lineam continuamus, qualis est B D: atque ex hac facimus Diametrum Circuli: & ex puncto diuisionis E, perpendicularem ducimus ad peripheriam, qualis hoc loco E A: quæ continuata ad punctum oppositum C, constituit A C lineam, bipartitò diuisam in E: ob idq́, quod fit ex A E in E C, est Quadratum: & æquale ei quod ex B E in E D fit, Rectangulo.

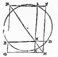
Ex hac etiam deprompta est quadragesimatertia Primi, quam Gnomonicam vocauimus.



Sint enim in Circulo A B C D, duæ lineæ A C & B D, se scindentes in puncto E: sitq́, quod fit ex A E in E C, Rectangulum A E D F: quod verò ex B E in E D, sit Rectangulum E B G C: commutatis partibus E C & E D, vt vides.

Quum itaque hæc duo Rectangula, in solo puncto E iuncta sint, & nutare quodammodo videantur: ea connectenda fuerunt, & stabilienda. Quod firmiùs fieri non poterat, quàm perfecto Parallelogrammo F H G K, ductaq́, Diametro H K. Ac tum duo Supplementa E F & E G apparent æqualia. In quo mira quædam te-

rum colligatio & cõsecutio sese offert expendendam. Quod nos præterire cogimur, aliò properantes. Id vnum tamen dicemus, lineam G H tanto spatio egredi Circulum,



quanto K F eundem ingreditur: Et Diametrum H K tantum distare à Centro Circuli, quantum duo Parallelogramma H E & E K absunt à Quadratis. Si enim Quadrata essent, nempè si fuissent E C & E D æquales: totum F G, Quadratum esset, Circulo circunscriptum: ipsiusq́; Diameter H K, eadem cum Circuli Diametro.

Hinc quoque desumptum est, vt super data linea, dato Rectangulo æquale Rectangulum constitueretur. Hîc enim super linea B E, quam pro data sumimus, constituitur Rectangulum E G, æquale Rectangulo E F, quod etiam pro dato sumitur.

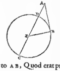
Ex hac etiam facilè habetur excessus Parallelogrammi maioris supra minus. Quid multa? ex hoc Theoremate innumerabiles considerationes, velut ex fonte quodam, emanant: quæ ad Proportiones pertinent. Quas, quum illûc ventum erit, poterit sibi Lector effingere, ex huius Propositionis recordatione.

Neque miretur quisquam, quòd priora cum posterioribus retexam. Id enim ad Demonstrationes eruendas tantùm facio. Nam aliud est, artem tenere: aliudq́;, artem docere. Multaq́; priora sunt naturâ, quæ ars cogitur posteriora tradere: atque econtrariò: nempè, aut compendij faciendi, aut lucis addendæ, aut denique methodi obseruandæ gratia.

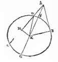
THEOREMA 30, PROPOSITIO XXXV.
Theoni 36.

Si à puncto extra Circulum signato duæ lineæ ductæ fuerint, quarum altera secet Circulum, altera tangat: quod ex tota secante in partem sui extimam fit, Rectangulum, æquum est ei quod ex tangente fit, Quadrato.

Sit punctum A, signatum extra Circulum B C D, cuius Centrum E: ducanturq́; duæ lineæ, A D C quidem Circulum secans in D puncto: & A B eundem tangens in B. Dico id quod fit ex tota A C in partem A D, esse æquale Quadrato A B.



Aut enim A D C transit per Centrum, aut non transit. Si transit: ducatur à Centro E ad punctum contactus B, linea E B: Quæ, per decimamseptimam huius, erit perpendicularis ipsi A B. Et quoniam linea D C diuisa est per æqualia in puncto E, additurq́; ei linea D A: erit, per sextam Secundi, quod fit ex tota A C in partem A D cum Quadrato E D (ob idq́;, cum Quadrato E B) æquale Quadrato A E: atque ob id, Quadratis duarum A B & E B. Dempto igitur communi Quadrato E B: erit quod fit ex A C in A D, æquale Quadrato A B, Quod erat probandum.



Si verò A C non transit per Centrum, ducatur A F E G per Centrum E: Et connectatur B D: Ducaturq́; E H perpendicularis ad A C. Et erit D H æqualis H C, per tertiam huius. Itaque, per sextam Secundi modò inductam, quod fit ex A C in D C cum Quadrato D H, æquale est Quadrato A H. Commune addatur Quadratum H E: Erit quod fit ex A C in D C cum duobus Quadratis D H & H E (ob idq́;, per quadragesimamseptimam Primi, cum Quadrato E F, nam id sumo loco E D) æquale duo

le duobus AH & HE Quadratis: ob idq́; , Quadrato AB, per eandem quadragesimamseptimam. At quod fit ex AG in FG cum ipso EF Quadrato, æquale est eidem Quadrato AE. Quod igitur fit ex AC in AD cum Quadrato EF, æquale est ei quod ex AG in FG cum eodem EF Quadrato. Ablato itaque communi EF, erit quod fit ex AC in DC æquale ei quod ex AF in FG: Quare & Quadrato AB, vt modò probauimus, Quod fuit demonstrandum.

Consectaria ex Campano.

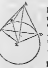
Si ab eodem puncto extra Circulum signato, plures lineæ Circulum secent: quæ ex vnaquaque in sui partem extimam fiunt Rectangula, inter se sunt æqualia.

Hoc autem ex eo manifestum est, quòd singula huiusmodi Rectangula sint æqualia Quadrato lineæ ab illo puncto ductæ ad contactum Circuli, per hanc trigesimamquintam. Ex hoc etiam addit.

Si duæ lineæ ab eodem puncto ductæ Circulum tangant, ipsæ inter se sunt æquales.

Quod quanuis Demonstratione non egeat, quum vtraque sit æqualis ei quod fit ex linea, quæ ab eodem puncto educta Circulum secat in sui partem extimam: ipse tamen sic probat.

Sit punctum A extra Circulum BCD, cuius Centrum E: ducanturq́; duæ lineæ AB & AD, quæ Circulum tangant in punctis B & D. Dico ipsas esse æquales.



Ducam lineas EB & ED. Eritq́; , per decimamseptimam huius, vterque angulorum B & D rectus: quapropter Quadratum AE, per quadragesimamseptimam Primi, æquale duobus Quadratis AB & EB: similiter & duobus AD & ED. Igitur duo AB & EB Quadrata, sunt æqualia duobus AD & ED Quadratis. Et quia EB & ED sunt æqualia: erunt duo reliqua AB & AD æqualia. Quare AB æqualis AD, Quod erat ostendendum.

Idem rursus. Connectatur linea BD. Eritq́; , per quintam Primi, angulus EBD æqualis angulo EDB. Et quia duo ABE & ADE anguli sunt æquales, nempè recti: ablatis æqualibus EBD & EDB, erunt duo ABD & ADB æquales. Quare, per sextam Primi, erit AB ipsi AD æqualis.

Nos etiam hæc addemus,

A puncto extra Circulum signato, duæ tantùm lineæ ad contactum Circuli deduci possunt.

Stante postrema descriptione, à puncto A in Circulum BCD dico non posse demitti plures contingentes, quàm duas AB & AD.

Quòd si fieri possit, educatur AF, contingens Circulum in puncto F: & connectatur EF. Eritq́; angulus F rectus, per decimamseptimam huius: Quapropter æqualis angulo EBA, repugnante vigesima Primi.

Id etiam ea ratione probabitur: quòd omnes lineæ ab vno puncto ductæ, Circulum tangentes, sint æquales: vt antè ostendimus. At duæ AB & AF æquales esse non possunt, aduersante octaua huius.

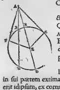
THEOREMA 31, PROPOSITIO XXXVI.

Theoni 37.

Si à puncto extra Circulum signato, duæ lineæ in Circulum

culum ceciderint, quarum altera ipsum secet, altera ei applicetur: sit autem quod ex tota secante in sui partem extimam fit Rectangulum, æquale ei quod ex applicata fit Quadrato: Applicata Circulum tangit.

Sit punctum A, signatum extra Circulum B C D, cuius Centrum E: cadantq; ab A puncto duæ lineæ, A B D quidem Circulum secans, & A C ipsi Circulo applicata: sitq; quod fit ex A D in A B, æquale ei quod fit ex A C Quadrato. Dico lineam A C tangere Circulum. Conuersa antecedentis.



Primùm enim si linea A B D transit per Centrum, ducatur recta C E. Et erit, per sextam Secundi, quod fit ex A D in A B cum Quadrato E B, ob idq; cum Quadrato E C, æquale Quadrato A E. At quod fit ex A D in A B, ponitur æquale Quadrato A C. Et Quadratum igitur A C cum Quadrato C E, æquale est Quadrato A E. Igitur, per vltimam Primi, angulus C rectus. Quare, per decimamquintam huius, linea A C contingit Circulum.

Quod si A B D non transit per Centrum, ducatur à puncto A, linea A D, in qua Centrum E. Et quia quod fit ex hac tota in sui partem extimam, æquum est ei quod fit ex A D in A B, per antecedentem: erit idipsum, ex communi Notione, æquale Quadrato A C. Quapropter E C A angulus, rectus est: ex ijs quæ modò probauimus. Ob idq;, A C contingens Circulum, Quod erat demonstrandum.

ALITER. Maneat iam inducta descriptio: atque insuper à puncto A ad alteram partem Circuli demittatur A F, per decimamsextam huius, contingens Circulum. Et connectatur E F. Eritq; angulus F rectus, per decimamseptimam: Et per antecedentem, quod fit ex A D in A B, æquale Quadrato A F. At ex hypothesi, idipsum est æquale Quadrato A C. Est igitur A C linea æqualis A F. Quapropter quum duo latera A F & E F, Trianguli A E F, sint æqualia duobus A C & E C, Trianguli A E C: & basis A E vtrique communis: sitq; angulus F rectus: erit & angulus C rectus, per octauam Primi. Quare A C tangit Circulum, per Consectarium decimæquintæ huius, Quod erat demonstrandum.

Libri Tertij Geometricorum Elementorum

FINIS.

IACOBI PELETARII
CENOMANI IN EVCLIDIS
ELEMENTA GEOMETRICA DEMONSTRATIONVM LIBER QVARTVS.

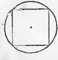
DEFINITIONES.

Figura Rectilinea, in altera Rectilinea inscribi dicitur, quum singuli inscriptæ Figuræ anguli, singula eius in qua inscribitur, latera tangunt.

2 Figura verò circa Figuram, quum singula latera circunscriptæ, singulos eius circa quam describitur, angulos tangunt.



Satis constat Rectilineas Figuras eiusdem speciei, alias alijs inscribi aut circumscribi: vt Triangulum Triangulo, Quadrilaterum Quadrilatero: non diuersæ. Si enim plures sint anguli vnius, quàm latera alterius, aut contrà: non erit mutuus contactus singulorum, vt oportet.



3 Figura Rectilinea in Circulo describi dicitur, quum omnes ipsius anguli, Peripheriam tangunt:

4 Circulus verò circa Figuram Rectilineam, quũ ipsius Peripheria omnes interioris Figuræ angulos tangit.



5 Circulus in Figura Rectilinea describi dicitur, quum ipsius Peripheria singula interioris Figuræ latera tangit.

6 Figura verò Rectilinea circa Circulum, quum ipsius singula latera, Circuli Peripheriam tangunt.



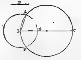
7 Recta linea in Circulo accommodari dicitur, quum ipsius extrema in Circuli Peripheriam cadunt.

PRO

PROBLEMA PRIMVM, PROPOSITIO PRIMA.

IN dato Circulo, datæ lineæ rectæ quæ Circuli Diametro minimè maior existat, æquam lineam rectam accommodare,

Sit datus Circulus ABC, cuius Diameter BC: data verò linea D, quæ maior non sit ipsa BC. Volo in Circulo ABC aptare lineam, lineæ D æqualem.



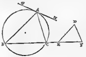
Si D est ipsi BC æqualis, constat propositio. ' uis minor: abscindatur ex BC, pars BE æqualis ipsi D: & secundùm spatium BE, describatur Circulus AEFA, secans Circulum ABC in punctis A & F. Et connectatur AB: quæ, per secundam Tertij, secat Circulum ABCA: estq; ipsi BE æqualis, ex definitione Centri. Quare & ipsi D lineæ æqualis, Quod erat faciendum.

ETIAM nulla Diametro posita, aptabitur linea. Tantùm in puncto Peripheriæ fortuito ponatur Centrum: ac secundùm longitudinem lineæ datæ describatur alter Circulus, datum Circulum secans.

PROBLEMA 2, PROPOSITIO II.

In dato Circulo, Triangulum dato Triangulo æquiangulum describere.

Sit datus Circulus ABC, datum verò Triangulum, DEF. Volo in Circulo ABC describere Triangulum, Triangulo DEF æquiangulum.



Per punctum A duco GH, quæ tangat Circulum in ipso A, per decimamsextam Tertij. Et duco rectam AB in Circulum, quæ cum GA faciat angulum BAG, æqualem angulo F: itemq; ducta AC, facio angulum CAH æqualem angulo E: Et connecto BC. Dico ABC Triangulum, esse Triangulo DEF æquiangulum.

Est enim angulus B, per trigesimamprimã Tertij, æqualis angulo CAH: ob id, & angulo E. Eadem ratione angulus C æqualis est angulo BAG: ob id, & angulo F. Reliquus igitur BAC, per trigesimamsecundam Primi, reliquo D æqualis. Quare Triangulum BAC, ipsi DEF æquiangulum, Quod faciendum fuit.

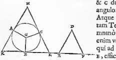
PROBLEMA 3, PROPOSITIO III.

Circa datum Circulum, dato Triangulo æquiangulum Triangulum describere.

Sit datus Circulus ABC, datum verò Triangulum DEF. Volo ipsi ABC Circulo circunscribere Triangulum, ipsi DEF Triangulo æquiangulum.

Protraham basin EF vtinque, vt fiant duo extrinsecùs anguli E & F. Tum à Centro Circuli, quod sit G, educam GB ad Peripheriam. Et ab eodem G puncto educta CA, constituam angulum BGA, æqualem angulo E exteriori. Similiter educta GC,

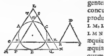
cta G C, faciam B G C angulum, æqualem angulo F exteriori. Tum per puncta A, B, & C ducam lineas H K, H L & K L, ad rectos angulos cum Semidiametris A G, B G, & C G. Atque harum vnaquæque, per decimamquintam Tertij, tanget Circulum: Et protractæ, omninò cõcurrent, vt in punctis H, K, L: Quum enim vterque angulorum qui est ad A, & vterq; qui ad B, sit rectus: linea quæ ducetur ab A ad B, efficiet cum H K & L K, duos angulos versùs K, minores duobus rectis (quia vterque pars recti). Itaque, per quintam Petitionem, concurrent H K & L K. Atque eadem ratione concurrent H L & K L; quum vterque angulorum qui ad C, sit rectus: fietq; Triangulum H K L. Quod dico esse æquiangulum Triangulo D E F.



Quoniã enim in Quadrilatero A G B K, duo anguli A & B sunt recti: erũt duo reliqui G & K, duobus rectis æquales: sunt enim cuiuslibet Quadrilateri, quatuor anguli quatuor rectis æquales: vt ostensum est ad trigesimamsecundam Primi. Atqui duo anguli qui ad E, sunt duobus rectis æquales, per decimamteriam Primi. Quum igitur angulus G positus sit æqualis angulo E exteriori: erit angulus K, æqualis angulo E interiori. Eadem ratione erit angulus L æqualis angulo F interiori. Quare, per trigesimamsecundam Primi, reliquus H, reliquo D æqualis. Et totum Triangulum toti Triangulo æquiangulum, Quod erat probandum.

ALITER. Sit, vt priùs, Circulo A B C Triangulum circunscribendum, Triangulo D E F æquiangulum.

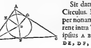
In ipso A B C Circulo, inscribo Triangulum G H K, ipsi D E F æquiangulum, per antecedentem: vt sit angulus G æqualis angulo D: angulus H, angulo E: & angulus K, angulo F. Duco postmodùm L M parallelum ipsi G H: quæ tangat Circulum in puncto A: per ea quæ addidimus ad decimamsextam Tertij. Duco similiter M N parallelum ipsi H K, & contingentem Circulum in B: itemq; L N parallelum ipsi G K, cõtingentem Circulum in C. Atque hæ tres lineæ omninò concurrent, vt ad puncta L, M, & N: quod patebit productis vtrinque lineis G H, G K, & H K, donec secent L M, L N, & M N in punctis O, P, Q, R, S, T. Dico iam L M N Triangulum Circulo G H K circunscriptum, esse æquiangulum Triangulo D E F. Est enim euidenter æquiangulũ Triangulo G H K, per legem parallelorum: quum angulus M T Q sit æqualis angulo G, Trianguli G H K, ex vigesimanona Primi: ob id, & angulus L eidem G æqualis, per eandem. Sic & angulus M, angulo H eiusdem Trianguli: & angulus N, angulo K. Totum igitur L M N Triangulum, toti G H K Triangulo æquiangulum: quapropter & ipsi D E F, Quod erat faciendum.



HÆC constructio ex iis est, quæ licet tædiosæ videantur: tamen ob concinnitatem faciles sunt. Vnica etiam Propositione, nempè vigesimanona [illegible], probatur.

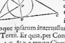
PROBLEMA 4, PROPOSITIO IIII.

In dato Triangulo Circulum describere.



Sit datum Triangulum A B C, in quo describendus sit Circulus. Diuido duos ipsius angulos A & B æqualiter, per nonam Primi, ductis lineis A D & B D: quæ concurrent intra Triangulum in puncto D. A quo ad tria latera ipsius A B C Trianguli, ducam tres perpendiculares D E, D F, & D G.

Et quoniam duorum Triangulorũ A E D & A G D, duo anguli qui ad A, sunt æquales, duoq́, anguli E & G recti, & latus A D commune: erit, per vigesimamsextam Primi, linea D E æqualis lineæ D G. Rursus quum duorum Triangulorum B E D & B F D, duo anguli qui ad B, sint æquales, anguliq́, E & F recti, & latus B D commune: erit per eandem, linea D E æqualis lineæ D F. Quapropter tres lineæ D E, D F, & D G, æquales. Posito itaque Centro in D, Circulus descriptus secundùm cuiuscunque ipsarum interuallum, transibit per extremitates reliquarum duarum, ex nona Tertij. Et quia, per Consectarium decimæquintæ eiusdem, vnaquæque linearum A B, A C, & B C tangit Circulum, quia perpendicularis ad extremum Semidiametri: constat Propositio.



PROBLEMA 5, PROPOSITIO V.

Circa datum Triangulum, Circulum describere.

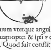
Sit datum Triangulum A B C, circa quod describendus sit Circulus.

Duo ipsius latera diuido æqualiter: A B quidem in puncto D, & A C in puncto E. Tum excito perpendiculares ab ipsis D & E punctis: quæ protractæ concurrent, vt ad punctum F. Nam si intelligatur duci linea D E ab angulis rectis D & E: ipsa efficiet angulos versùs F, minores duobus rectis. A puncto itaq; concursus F, quod dico esse Centrum Circuli, duco ad tres angulos Trianguli A, B, C: lineas F A, F B & F C. Quumq́, duo latera A D & D F, Trianguli A D F, sint æqualia duobus lateribus B D & D F, Trianguli B D F: & angulus D vnius, æqualis angulo D alterius, nempè vterque rectus: erit, per quartam Primi, F A æqualis F B. Eadem ratione, comparato A E F Triangulo cum C E F: erit eadem F A æqualis ipsi F C. Tres igitur F A, F B & F C æquales. Quare, per nonam Tertij, erit F Centrum Circuli, Quod erat constitutum.



Hæc est in vniuersum Circuli Triangulo circumscribendi constructio. Sed nominatis Triangulorum speciebus, sic erit faciendum.

Ac primùm, sit Triangulum A B C Rectangulum, cuius angulus A rectus. Diuido latus B C angulo recto oppositum, per æqualia, in puncto F. A quo ad media puncta duorum A B & A C, duco F D & F E: quarum quum F D secet duo latera A B & B C æqualiter: ipsa erit tertio A C æquidistãs: vt demonstratum est ad trigesimamnonam Primi: Eademque ratione erit F E æquidistans A B. Et quia totus A angulus rectus est: erunt & anguli qui ad D & E, recti: per vigesimamnonam Primi. Ducta itaque F A, erunt duo latera A D & D F, Trianguli A D F, æqualia duobus B D & D F, Trianguli B D F. Ob id, quum vterque angulus qui ad D, sit rectus: erit, per quartam Primi, F A æqualis F B, quapropter & ipsi F C. Tribus igitur F A, F B, & F C æqualibus, erit F Centrum Circuli, Quod fuit constitutum.

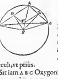


Sed & id constabat ex primo capite trigesimæ Tertij, vt nos illic probauimus.

Sed sit Triangulum Amblygonium, cuius angulus A obtusus.

Diuido latus B C bipartitò in puncto H. A quo ad media puncta D & E, duco lineas H D & H E. Et erit H D æquidistans A C: & H E æquidistans A B, vt paulò antè ostendimus, Quapropter vterque angulorum B D H & C E H, æqualis angulo A: ob idq́.

obtusus



obtusus. Deductis itaque perpendicularibus à punctis n & E; vtraque ipsarum secabit latus B C: & protractæ concurrent, vt ad punctum F, intellecta linea D E, per quintam Petitionem. Iam à puncto concursus F, duco lineas F A, F B & F C: quæ per quartam Primi, erunt æquales: si comparauerimus duo latera A n & D F, Trianguli A n F, duobus B D & D F, Trianguli B D F: deinde duo A E & E F, Trianguli A E F, duobus C E & E F, Trianguli C E F. Quare F Centrum Circuli, vt priùs.

Sit iam A B C Oxygonium. Ac diuisis tribus lateribus, vt in superioribus, per æqualia in punctis D E H: connecto D E, D H, & E H. Eritq́, vt priùs, n H æquidistans A C: & E H, æquidistans A B: ob idq́, per vigesimamnonam Primi, vterque angulorum B D H & C E H, æqualis angulo A: sicq́; acutus. Ductis igitur perpendicularibus, D F quidem ad A B, & E F ad A C, quæ concurrent intra Triangulum A B C ad punctum F: connectantur F A, F B, & F C. Quæ, per quartam Primi bis sumptam, vt in superioribus, erunt æquales. Quare F, vt priùs, erit Centrum Circuli, Quod erat faciendum.

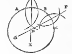


Modi igitur omnes in primum recidunt: nempè vt diuisis duobus lateribus Trianguli bifariam, ducantur à duobus punctis diuisionum perpendiculares: & in concursu ambarum statuatur Centrum Circuli.

HINC manifestum est, Triangulum, cuiusmodicunque sit, id priuilegij habere, quòd ipsi Circulo inscribi & circunscribi possit. In Circulis autem inscribendis, diuiduntur anguli: circunscribendis, latera.

Ex eadem hac depromptum est compendium illud artificibus vsitatum,

Per tria data puncta in directam lineam minimè constituta, Circulum ducere.



Vt, si sint tria puncta A, B, & C: hæc intelliguntur esse connexa per lineas rectas in Triangulum: diuiditurq́, bifariam spatium inter A & B: itidem spatium inter B & C: & educuntur à punctis diuisionum, duæ perpendiculares: quales hoc loco sunt D E & F G, secantes se in H Centro. Quod sit Circuli officio: sicut antè demonstrauimus, ad vigesimamquartam Tertij.

Consectarium.

Si fuerit Triangulum Orthogonium: cadit Centrum Circuli in medium latus recto angulo oppositum: si Ambligonium, extra Triangulum: si Oxigonium, intra. Si verò Centrum in medium latus ceciderit, Orthogonium est Triangulum: si extrinsecùs, Amblygonium: si introrsùm, Oxygonium.

Quod manifestum est, ex ijs, quæ iam demonstrata sunt.

PROBLEMA 6, PROPOSITIO VI.

In dato Circulo Quadratum describere.

Sit datus Circulus A B C D, cuius Centrum E. Volo in ipso Circulo Quadratum inscribere.

Duco duas Diametros se ad angulos rectos secantes in E Centro: quarum extrema connecto quatuor lineis AB, BC, CD, & DA. Dico ABCD esse Quadratum.



Erunt enim, per quartam Primi, quatuor latera æqualia: quum sint bases quatuor laterum æqualium, quæ à Centro ad Peripheriam exeunt, æqualesq́, angulos qui ad E, connnent. Et vnusquisque quatuor angulorum A, B, C, D rectus, per primam partem trigesimæ Tertij: quum sint in Semicirculo. Quadratum igitur est ABCD, Quod erat faciendum.

QVI à Centro originem Quadrati ducunt, duas lineas ad angulos rectos se scindentes, hinc inde ad Peripheriam continuant, & quatuor bases connectunt. Ac tum per semirectos ratiocinantur. Quod in idem recidit.

PROBLEMA 7, PROPOSITIO VII.

Circa datum Circulum, Quadratum describere.

Sit datus Circulus ABCD, cuius Centrum E. Circa hunc volo Quadratum describere.

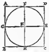
Duco duas Diametros AC & BD, se scindentes in Centro E ad angulos rectos. Tum per quatuor ipsarum extrema A, B, C, D, duco quatuor perpẽdiculares FG, GH, HK, & KF, sibi inter se occurrentes ad quatuor puncta F, G, H, K. Eruntq́, per vigesimamoctauam Primi, FG & HK inter se, & ipsi AC æquidistantes: quum in ipsas cadat BD vtrinque ad angulos rectos. Itidem FK & GH, inter se & ipsi BD æquidistantes: Quapropter, ex trigesimaquarta eiusdem bis sumpta, erunt quatuor anguli F, G, H, K recti, quia rectis oppositi. Quumq́, duæ FG & HK sint Diametro AC æquales, per eandẽ: quia Quadrilatera FC & AH, sunt æquidistantium laterum: similiter & duæ FK & GH, Diametro BD æquales: erunt omnes inter se æquales, propter æqualitatem Diametrorum. Quare FGHK Quadratum, Circulo circunscriptum, Quod erat faciendum.



PROBLEMA 8, PROPOSITIO VIII.

In dato Quadrato, Circulum describere.

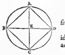
Sit datum Quadratum ABCD, intra quod describendus sit Circulus.



Diuido quatuor ipsius latera æqualiter in punctis E, F, G, H: ducta GE parallelo & æquali ipsis AD & BC: itemq́, FH parallelo & æquali ipsis AB & CD: quæ secet GE in puncto K: Quod dico esse Centrum Circuli.

Sunt enim quatuor dimidia KE, KF, KG, & KH, per trigesimãquartam Primi, æqualia quatuor dimidijs lateribus ipsius Quadrati: ob id, & inter se æqualia. Quare, per nonam Tertij, K est Centrum Circuli inscribendi, Quod erat constitutum.

PROBLEMA 9, PROPOSITIO IX.



Circa datum Quadratũ, Circulũ describere.

Sit datum Quadratum ABCD, circa quod describendus sit Circulus.

Duco duas Diametros AC & BD, secantes se in puncto E: idq́, æqualiter, per sextam Primi: quia bini quique anguli qui ad A, B, C, D sunt semirecti, per quintam & trigesimamsecundam

dam eiusdem. Quare E est Centrum Circuli circumscribendi. Quod erat faciendum.

SVB has Quadrati & Circuli mutuas inscriptiones visum est adscribere peruulgatum hoc Theorema,

Quadratum Circulo circumscriptum, duplum est Quadrati eidem Circulo inscripti.

Sit Quadratum A B C D circumscriptum Circulo E F G H, cuius Centrum K: sintq́; puncta contactuum, E, F, G, H. Et ductis duabus Diametris E G & F H, inscribatur ipsi Circulo, per sextam huius, Quadratum E F G H. Dico A B C D Quadratum, esse duplum ipsius E F G H Quadrati.



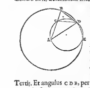
Nam quum latus A B maioris Quadrati, sit, per trigesimamquartam Primi, æquale F H Diametro Quadrati minoris: Quadratum autem ipsius F H duplum sit Quadrati cuius est Diameter, scilicet Quadrati E F G H, per quadragesimamseptimam Primi: erit & Quadratum ipsius A B, quod est A B C D, duplum Quadrati E F G H, Quod erat ostendendum.

POSSET alijs expositionibus demonstrari, vt ex æqualitate Triangulorum & Quadratorum: Sed nos hac vna contenti sumus facili & compendiosa ostensione. Hoc autem Theorema ab Euclide non fuit appositum, fortasse quòd sola Problemata in hoc Quarto libro tractaret: fortasse etiam quòd de aliarum Figurarum proportione tradendum fuisset: quanuis tamen hanc ordinis rationem non seruet. Paucas enim Figuras Circulo inscribere docet cæteras prætermittit: infinitatem quidem deuitans, sed & difficultate deterritus. Id ipsum verò, vt cuius consideratio esset vtilata, hic apponere non dubitauimus.

THEOREMA 10, PROPOSITIO X.

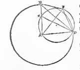
Isosceles Triangulum constituere, habens vtrunque eorum qui ad basin sunt angulorum, duplum anguli qui ad verticem.

Sumatur ad arbitrium, linea A B: quæ sic diuidatur in puncto C vt docet vndecima Secundi: scilicet vt quod fit ex A B in B C, sit æquale Quadrato A C. Tum posito Centro in A, describatur interuallo A B, Circulus B D E B: In quo, per primam huius, accommodetur linea B D æqualis A C: Et connectantur D A & D C. Dico vtrunque angulorum A B D & A D B, Trianguli A B D, esse duplum anguli A.



Ac primum sans constat Triangulum esse Isosceles: quum duo A B & A D latera sint ex Centro: ac propterea duos angulos A B D & A D B esse æquales, per quintam Primi. Iam circa Triangulum A C D describo Circulum D C A, per quintam huius. Et quia B D est æqualis A C: erit quod fit ex A B in B C, æquale Quadrato B D: ac propterea B D tangit Circulum, per vltimam Tertij. Et angulus C D B, per trigesimamprimam eiusdem, æqualis est angulo alterno C A D. Posito itaque cõmuni angulo C D A, erit totus B D A angulus, æqualis duobus C A D & C D A. At angulus B C D, per trigesimamsecundam Primi, æqualis est iisdē C A D & C D A, duobus interioribus oppositis. Erit igitur B C D toti B D A æqualis: ob id, & ipsi A B D. Quare, per sextam Primi, linea C D æqualis lineæ B D. ob id, & lineæ C A. Angulus igitur C D A, per quintam Primi, æqualis est angulo C A D: ob idq́; , anguli C D B. Duplus itaque est angulus B D A, anguli B A D: Quare & angulus A B D

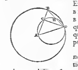
duplus eiusdem, Quod erat faciendum.



Appendix Campani. Forsan contendet aliquis Circulum A C D secare Circulum B D E in puncto aliquo Arcus B D, simulq́, secare lineam B D: quo fiet vt B D linea non sit Circulo A C D applicata: vt in Demonstratione astruitur, sed ipsum secans.

Secent igitur inter se, si fieri possit, ducaturq́; à puncto B, linea B F tangens Circulum A C D: Et connectantur F A & F D. Eritq́, per trigesimamquintam Tertij, quod fit ex A B in B C, æquale Quadrato B F: ob idq́, B F æqualis B D: Vnde per quintam Primi, angulus B F D æqualis angulo B D F. Et quia, per trigesimamprimam Tertij, angulus B F A, est æqualis angulo A D F alterno: erit angulus B D F maior angulo A D F, pars toto.

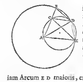
Refellit & idem aliter. Nam si fortè dicatur Circulus A C D secare lineam B D, neque tamen secare Arcum B D maioris Circuli: Secet ipsam, si possit, in puncto H.



Eritq́, quod fit ex A B in B C, æquale ei quod fit ex D B in B H, per trigesimamquintam Tertij: quum vtraque B A & B D ab eodem puncto B, cadat ad sectionem Circuli. Et quia quod fit ex A B in B C, æquale est Quadrato B D: erit quod fit ex D B in B H, æquale eidem Quadrato D B: repugnante secunda Propositione Secundi.

Sed hæc frustrà in dubitationem adducuntur à Campano. Linea enim B D non tantùm astruitur in Demonstratione tangere Circulum A C D, sed etiam probatur.

At notabilius est quod ipse subijcit, Duos Circulos A C D & B D E se mutuò secare: & Circulum A C D abscindere à Circulo B D E, Arcum æqualem Arcui B D: Circulum verò B D E, abscindere à Circulo A C D Arcum æqualem Arcui D C.



Prior pars constat ex eo, quod si minor non secet maiorem, sed tangat ipsum in puncto D: erit, per vndecimam Tertij, Centrum vtriusque in linea vna, scilicet in A D: propterea quod in ipsa est Centrum maioris, & in eadem punctum contactus. Erit igitur angulus A C D, per trigesimam Tertij, rectus: & per decimamtertiam Primi, angulus D C B rectus: sicq́, A B D rectus, vtpotè huic æqualis, Quod per trigesimamsecundam Primi, fieri non potest.

Secabunt igitur inter se, vt in punctis D & E. Dico iam Arcum E D maioris, esse æqualem Arcui D B: & Arcum E D minoris, æqualem Arcui D C.

Connecto E A, E C, & E D. Eruntq́, per vigesimamsextam Tertij, quatuor anguli D E C, C E A, E A C, & A D C, æquales: quum sint Arcus C A & C D æquales, per vigesimamseptimam eiusdem. Totus itaque angulus A E D duplus est anguli B A D: ob idq́, æqualis vtrique angulorum A B D & A D B. Et quia angulus A E D æqualis est angulo A D E, per quintam Primi, quoniam A D & A E sunt à Centro: erunt duo anguli E & D, Trianguli A E D, æquales duobus angulis D & B, Trianguli A D B: ob id, per trigesimamsecundam Primi, reliquus angulus A vnius, æqualis reliquo angulo A alterius, Quare, per vigesimamsecundam Tertij, Arcus E D maioris, æqualis Arcui D B: Et per eandem, Arcus E D minoris, æqualis Arcui D C, Quod erat probandum.

Svper hæc, obseruandum, In omni Triangulo, quale hoc loco est A B D, angulum verticis, vt hîc angulum A, esse vnam tertiam cum vna quinta vnius tertiæ recti:

recti: hoc est, duas quintas vnius recti: ac breuiter, vnam quintam duorum rectorum. Vtrunque verò angulorum qui ad basin, esse duas quintas duorum rectorum. seu quatuor quintas vnius recti. Quod clarum est, diuisis duobus angulis rectis in partes quintas. Tum enim in Triangulo, angulus verticis erit vnius quintæ: & vteruis duorum qui ad basin, duarum quintarum. Hæc autem diuisio lineæ A B, qualis est in puncto C, dicetur ab Euclide in trigesima Sexti, proportio secundùm mediam & extremam rationem: vtpote quum A C sit medium proportionale inter B C & B A. In qua quidem, numerus Quinarius præcipuam habet vim. Nam in omni quantitate quæ sic diuiditur, Quadratum totius iungitur cum Quadrato dimidiæ: Quod aggregatum perpetuò est quintuplum Quadrati ipsius dimidiæ. Id verò ex ea quam proposuimus specie in vndecima Secundi, repetemus. Sint 8 diuidenda sicut proponitur. Duco 8 in se, fiunt 64: Duco etiam eius dimidium nempè 4, quanta est illic linea D E aut E B, in se: fiunt 16. Hæc iuncta, scilicet 64 & 16 faciunt 80, quintuplū 16. Itaque ad huiusmodi Triangulum inuestigandum, opus fuit tali diuisione lineæ: cui præest Quinarius numerus. Hoc igitur Problema ad Pentagonum Circulo inscribendum spectat: vt in sequenti Propositione docetur.

ATQVE animaduertendum, lineam A C, esse latus Pentagoni æquilateri, Circulo A C D inscribendi. Quod sic demonstratur.

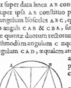
Ex posteriori constructione constitit, tres Arcus A C, C D, & D E minoris Circuli, esse æquales. Quumq; ex eadem constiterit duas lineas A D & A E esse æquales: erit & Arcus A E æqualis Arcui A D, per vigesimā septimam Tertij: quapropter eorum dimidia æqualia. Si igitur A E diuidatur æqualiter, erit tota Peripheria A C D E A diuisa in quinque Arcus æquales. Quorum quū subtensæ sint æquales, per vigesimamoctauam eiusdem: erit vnaquæque illarum latus Pentagoni, Quod erat demonstrandum. Et erit idem A C, latus Decagoni, Circulo B D E inscribendi: quod ad sequentes Demonstrationes pertinet. In summa, hæc omnia ex Proportionibus dependent. Et vt nostrum de hac tota re iudicium ingenuè explicemus, huic tractationi Proportiones erant præmittendæ.

Nos huic loco hoc subnectemus Problema.

Super data recta linea Pentagonum æquilaterum & æquiangulum constituere.

Sit super data linea A B constituēdum Pentagonum æquilaterum & æquiangulū.

Super ipsa A B constituo per vigesimamtertiam & trigesimamsecundam Primi, Triangulum Isosceles A B C, quale proponit hæc decima. vt scilicet super basi A B, duo anguli C A B & C B A, sint æquales duobus modò constructis: nempè vterque duæ quintæ duorum rectorum, & angulus verticis C vna quinta eorundem. Diuido postmodùm angulum C æqualiter, ducta linea C D: Ac super puncto A constituo angulum C A D, æqualem angulo A C D: ducta linea A D, quæ concurrat cum C D ad punctum D: idq; intra Triangulum A B C: nam C D protracta cadet in basin A B, & A D in latus B C. Tum connecto D B.



Et quia in Triangulo A C D, duo anguli A & C sunt æquales: erunt, per sextam Primi, duo A D & C D latera æqualia. Rursus quia duo latera C B & C D, Trianguli C B D, sunt æqualia duobus C A & C D, Triāguli A C D, & angulus C huius, æqualis angulo C illius. erit, per quartam Primi, basis D B basi D A, sicq; lineæ D C, æqualis. Erit igitur, per nonam Tertij, D Centrum Circuli. Et ducatur Circulus A B E C F. Iamq; angulus A D B duplus est anguli A C D, per decimamnonam Tertij. Ipse igitur A D B angulus facit duas quintas duorum rectorū: hoc est, vnam quintam quatuor rectorum. Quum itaque spatium circa D Centrum,

fit æquale quatuor rectis angulis: omninò diuidetur spatium ipsum in quinque angulos, æquales ipsi A D B, nempè in quinque quintas: ductis lineis D E & D F, quæ cum D A, D B, & D C æqualitatem quinariam distinguant. Connexisq́, A F, F C, C E, & E B, erit Rectilineum A B E C F, Pentagonum æquilaterum, per legem Centri & Peripheriæ, adhibita quarta Propositione Primi: Et æquiangulum, per quartam & quintam eiusdem: quum quinque anguli A, B, E, C, F, diuidantur in decem æqualia, Quod erat faciendum.

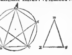
H o c Problema Bouillus ideò difficile putauit, quòd ab Euclide esset prætermissum. Sed & cæteras Figuras quarum posteriùs inscriptio demonstranda est, super data linea facilè construet, qui hanc nostram perspexerit Demonstrationem.

PROBLEMA II, PROPOSITIO XI.

In dato Circulo Pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

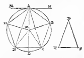
Sit datus Circulus A B C, cui inscribendum sit Pentagonum æquilaterum & æquiangulum.

Construatur Triangulum Isosceles D E F, quale præscripsit antecedens Propositio: Et in dato Circulo inscribatur Triangulum A B C, ipsi D E F æquiangulum, per secundam huius: vt scilicet vterque angulorum B & C duplus sit ad angulum verticis A. Horum vtrunque diuido æqualiter, ductis lineis B G & C H hinc atque hinc ad Peripheriam.



Eritq́, totus Circulus in quinque Arcus diuisus, in punctis A, H, B, C, G: eosq́, æquales, per vigesimamquintam Tertij, propter æqualitatem quinque angulorum qui in ipsos cadunt: quorum quatuor ad basin Trianguli A B C: quintus verò ad verticem A. Connexis itaque A H, H B: A G, & G C: erit Pentagonum A H B C G Circulo inscriptum, æquilaterum, per vigesimamoctauam Tertij, propter æqualitatem Arcuum quos quinque latera subtendunt: Et æquiangulum, per vigesimamsextam eiusdem: propterea quod quinque Arcus A B, H C, B C, C A, & G H in quos anguli ipsius Pentagoni cadunt, sunt æquales: quum ipsorum dimidia sint æqualia. Sicq́, constat Propositio.

A l i t e r. Constructo Triangulo D E F in speciem antecedentis Propositionis, sit Centrum K ipsius Circuli propositi A B C: & super Centro costituatur angulus. B K C, æqualis alterutri angulorum E aut F, Trianguli D E F: connectaturq́, B C. Dico B C esse latus Pentagoni.



Diuido angulũ K æqualiter, ducta Diametro A K L. Tum connecto B A & C A. Et constat ex decimanona Tertij, angulum K esse duplum totius anguli A. Igitur totus A angulus æqualis est angulo D, cuius duplus est ipse K. Et quia Trianguli A B K, duo anguli A & B sunt æquales, per quintam Primi, sunt enim K A & K B à Centro: erit, per trigesimamsecundam eiusdem, angulus B K L duplus ad vtrunlibet angulorum K A B & K B A, exterior interiori: Atque eadem ratione angulus C K L duplus ad vtrunlibet duorum K A C & K C A. Itaque quum ambo qui ad K anguli sint æquales, erunt duo anguli A & B, Trianguli A B K, duobus A & C, Trianguli A C K, mutuò æquales: ob idq́, per vigesimamsextam Primi, duæ bases A B & A C æquales. Triangulum igitur A B C Isosceles. Quumq́, angulus totus A, æqualis sit angulo D: erunt duo reliqui anguli A B C & A C B, per trigesimamsecundam Primi, duobus

bus reliquis E & F æquales. Quare Triangulum ABC, Triangulo DEF æquiangulum. Ac iam procedet Demonſtratio vt modò inſtituta fuit: intellectis ſcilicet BG & CH lineis.

Hanc Demonſtrationem adſcripſimus, vt oſtenderemus, inſcribendarum in Circulis Figurarum rationem à Centro & Diametro pendêre. Vt etiam intelligeremus, duos angulos qui ad K, Trianguli BCK, ſuper Centro incumbentes, eſſe cognitos. Quod in Heptagono Bouillus non putat. Sed vtinam tam facilis eſſet Heptagoni inuentio, quàm ipſi ſunt noti.

Atque hoc loco iucundum eſt intueri Triangulorum varietates. Vterque enim angulorum qui ad A, efficit quintam vnius recti: vnde emergit latus Decagoni eidem Circulo inſcribendi: vt conſtat intellectis lineis BL & LC. Arcus enim BC diuiditur in duo æqualia in puncto L, per vigeſimamquintam Tertij.

Ex Trianguli itaque æquilateri inſcriptione, notum fit Hexagonum: ſicq; ſemper ex ſimplici numero laterum, cognoſcitur duplum: vt ex Quadrato Octogonum: ex Octogono Sedecangulum. ac ſic continenter in cæteris. Immò etiam ex hac noſtra Demonſtratione ſtatim innoteſcit Pentagoni circunſcriptio: vt in ſequenti apparebit.

ALITER rurſus poterimus variare Pentagoni inſcriptionem. Sit Circulus quem modò exhibuimus, ABC: maneatq; Triangulum ipſum DEF. Duco ad Circulum, lineam MAN tangentem ipſum, per decimamſextam Tertij: Et ad punctum A, conſtituo angulum MAB æqualem alteri angulorum E aut F (quem ſatis conſtat eſſe minorem recto): ducta linea AB quæ ſecet Peripheriam in puncto B. Rurſus ad idem punctum A, conſtituo angulum NAC æqualem ipſi MAB: ducta linea AC, quæ ſecet Peripheriam in C. Et connecto BC. Dico BC eſſe latus Pentagoni. Quod patet diuiſo Arcu AB per ęqualia in puncto H, ductisq; AH & BH: itemq; diuiſo Arcu AC per æqualia in G, ductisq; AG & CG. Sumpto enim Quadrangulo ABCG, conſtat ex trigeſimaprima Tertij, angulum ABC æqualem eſſe angulo NAC alterno: ob id, & angulo E. Similiter ſumpto Quadrangulo ACBH, erit angulus ACB æqualis angulo MAB alterno: ob id, & angulo F. Quare, per trigeſimamſecundam Primi, erit, vt priùs, Triangulum ABC, ipſi DEF Triangulo æquiangulum: & procedet Demonſtratio vt in ſuperioribus.

SED & conſtituto ad Peripheriam angulo B, triplo anguli D, ductis lineis AH & BH, erit vtraque ipſarum AH & BH latus Pentagoni: ſicut intelligent ij qui ex comparatione angulorum ratiocinari volent. Nam in priori ſpecie, duo anguli B & C Pentagoni, ad Peripheriam, in tres angulos æquales diuiduntur: quorum ſinguli ſunt æquales angulo D. Huiuſmodi autem Demonſtrationes articulatim non exponimus, quò breuitati conſulamus: ac ſatis nobis eſt, ſi eas vtcunque informatas ex aliarum argumento, ſtudioſis examinandas relinquamus. In hac enim Figurarum inſcriptione tam latè patet ſpeculandi campus, vt ſingula aſſequi meditando nemo vnquàm poſſit. Quanquam nos initio cum Campano rem non admodùm vtilem eſſe putabamus. Quum verò attentiùs exploraremus quò ſpectaret hæc tam ordinata tamq; artificioſa conſtitutio: ſanè comperimus non fruſtrà creditum eſſe, Figuras quantò propius ad Circuli compoſitionem accedunt, tantò perfectiores eſſe. Res igitur hæc tanta eſt, quanta fortaſſe in toto opere Geometrico nulla: ſicut nos aliquando oſtendemus propria commentatione, ſi noſtris inuentis quæ in Geometria quotidie molimur, ſummus ille Geometer annuerit. Ex hac enim materia, nouum velut opificium & hactenus non excogitatum exurgit.

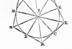
PROBLEMA 12, PROPOSITIO XII.

Circa datum Circulum, Pentagonum æquilaterum & æquiangulum deſcribere.

Sit Circe

Sit Circulus A B C, cuius Centrum F, cui circunſcribendum ſit Pentagonum æquilaterum & æquiangulum.

Diuido Peripheriam totam in quinque æqualia, per antecedentem, in punctis A, D, B, C, E. Et à Centro F educo quinque lineas, F A, F D, F B, F C & F E: ad quas hincinde duco quinque perpendiculares: Quæ concurrent in punctis G, H, K, L, M, tangentq; Circulum, per Cõſectarium decimæquintæ Tertij. Tum ad puncta concurſus ipſarum, duco à Centro lineas F G, F H, F K, F L, F M. Et quia G A



& G D ab vno puncto cadunt in Circulum: ipſæ erunt æquales, per ea quæ demonſtrauimus ad Trigeſimamquintam Tertij. Atque eadem ratione erit H D ipſi H B æqualis: & K B ipſi K C: ſicq, ordinatim. Et quoniam quinque Arcus A D, D B, B C, C E & E A ſunt æquales: erunt, per vigeſimamſextam Tertij, quinque anguli qui ad Centrum, A F D, D F B, B F C, C F E, & E F A, æquales. Et quia duo latera A G & F A, Trianguli F G A, ſunt æqualia duobus D C & F D, Trianguli F G D, & latus G F commune: erunt, per octauam Primi, duo ipſorum anguli qui ad F, inter ſe: duoq, anguli qui ad G, inter ſe quoque æquales. Similiter erunt duo anguli qui ad F, Triangulorum D F H & H F B, inter ſe: duoq, qui ad H, inter ſe æquales. Sicq; trium reliquorum Triangulorum B F C, C F E, & E F A, ſinguli diuidentur per æqualia, lineis F K, F L, & F M: eruntq, decem anguli qui ad Centrum, æquales. Quoniam igitur duo anguli A & F, Trianguli G A F, ſunt æquales duobus angulis A & F, Trianguli M A F, latusq, A F commune: erit, per vigeſimamſextam Primi, angulus G vnius, æqualis angulo M alterius: latusq, G A, æquale lateri A M. Eadem ratione erit angulus G, Trianguli C F D, æqualis angulo H, Trianguli D F H: latusq, G D æquale lateri D H. Quum itaque C A ſit dimidium G M, & C D dimidium G H: ſintq, G A & G D æqualia: erunt, per animi Notionem, G M & G H eorum dupla, æqualia.

Similiter probabimus G M, M L, L K, & K H eſſe æqualia. Quare Pentagonum G H K L M, æquilaterum. Sed & æquiangulum. Quum enim duo anguli qui ad G, probati ſint æquales: duoq, qui ad M, æquales: & G dimidius, æqualis M dimidio: erit totus G, toti M æqualis. Atque eadem ratione reliqui anguli ipſius Pentagoni probabuntur æquales, Quod erat faciendum.

ALITER ex Parallelis. In Circulo A B C, cuius Centrum F, inſcribo Pentagonum æquilaterum & æquiangulum A B C D E, ſicut docet antecedens: per cuius quinque angulos duco à Centro vltra Peripheriam, quinque lineas F G, F H, F K, F L & F M. Et conſtat quinque angulos qui ad F Centrum, eſſe æquales: quum latera quinque intrinſecus Triangulorum ſint æqualia, & baſes æquales. Cõſtat etiam quinque angulos Pentagoni, qui ad Peripheriam, eſſe diuiſos in decem angulos æquales, per quartam Primi. Duco itaque inter duas lineas F G & F H, lineam G H, parallelum lateri A B, & tangentem Circulum A B C, per ea quæ docuimus ad decimamſextam Tertij: atque huic ſimiles duco H K, K L, & L M, ſingulis lateribus B C, C D, & D E parallelos,



Et quoniam F G cadit in duas parallelos A B & G H, erunt duo anguli F G H & F H G, duobus F A B & F B A mutuò æquales, per ſecundã partem vigeſimænonæ Primi: ob idq, inter ſe æquales. Et per ſextam igitur Primi, duæ lineæ F G & F H æquales. Eadem ratione erunt duo anguli F H K & F K H, duobus F G H & F H G mutuò æquales: & F K æqualis F H: quapropter & ipſi F G. Quum itaque anguli qui ad F, ſint æquales: erit, per quartam Primi, baſis H K baſi G H æqualis. Similiter probabuntur tres lineæ F K, F L, & F M, æquales duabus F G & F H. Duæ item baſes K L & L M, æquales duabus G H &

G H & H K. Et anguli quos cum ipsis F K, F L, & F M faciunt, æquales inter se. Iam connecto quintam lineam M G: quæ erit æqualis quatuor prioribus, per ipsam quartam Primi: quum duæ lineæ F G & F M probētur æquales: sitq; angulus G F M æqualis vnicuique angulorum qui ad F. Hæc etiam tangit Circulum. Ad punctum enim contactus ipsius L M cum Circulo, quod sit N, duco F N. Et cōstat ex decimaseptima Tertij, vtrunque angulum qui ad N, esse rectum. Quapropter quum angulus L, Trianguli F L N, sit æqualis angulo M, Trianguli F M N: & angulus N vnius, æqualis angulo N alterius: & F N vtrique communis: erit, per vigesimamsextam Primi, N L æqualis N M: sicq; L M diuisa æqualiter in puncto N. Et quoniam tria latera Trianguli F G P, sunt æqualia tribus lateribus Trianguli F M P: erit angulus P vnius, æqualis angulo P alterius, per octauam Primi: quapropter vterque rectus, per decimamtertiam eiusdem. Quum itaque duo anguli F M P & F P M, Trianguli F M P, sint æquales duobus angulis F M N & F N M, Trianguli F M N: & latus F M vtrique commune: erit F P æqualis F N. Sed F N est à Centro ad Peripheriam. Et erit igitur F P à Centro ad Peripheriam. Quumq; M G sit ad E P perpendicularis: ipsa, per Consectarium decimæquintæ Tertij, contingit Circulum. Quare G H K L M Pentagonum circunscriptum Circulo, æquilaterum: Quod & æquiangulum probatum est, ex æqualitate dimidiorum: sicut facere oportuit.

Atque hæc Demonstratio quamuis amplior videatur, tamen ipso intuitu sese explicat.

PROLBEMA 13, PROPOSITIO XIII.

In dato Pentagono æquilatero & æquiangulo Circulum inscribere.

Sit datum Pentagonum A B C D E æquilaterum & æquiangulum, in quo describendus sit Circulus.

Duos angulos ad vnum quempiam laterum ipsius Pentagoni adiacētes, vt A & E, diuido æqualiter, ductis lineis A F & E F: Quæ concurrent intra Pentagonum ad punctum F. A quo ad vnumquodque laterum Pentagoni, duco quinque perpendiculares F G, F H, F K, F L, & F M. Tum ad duos angulos hinc indè proximos B & D, duco F B & F D. Et quia duo anguli A & M, Trianguli A F M, sunt æquales duobus angulis A & G, Trianguli A F G. & latus A F commune: erit, per vigesimamsextam Primi, F M æqualis F G. Ac similiter, per eandem, erit F L æqualis F M, sumptis duobus Triangulis E F L & E F M. Rursus quum duo latera A B & A F, Trianguli A B F, sint æqualia duobus A E & A F, Trianguli A F E. & angulus A vnius, æqualis angulo A alterius: erit, per quartam Primi, angulus A B F æqualis angulo A E F. Et quia totus B toti E est æqualis, & E diuisus æqualiter: erit & B diuisus æqualiter. Eadem ratione probabitur totus B æqualiter diuisus: sumptis Triangulis E A F & E D F. Quia ergo duo anguli G & B, Trianguli G F B, sunt æquales duobus angulis H & B, Trianguli H F B, & latus F B commune: erit, per vigesimamsextam Primi, F H æqualis F G. Eadem ratione probabitur F K æqualis F L, sumptis Triangulis L F D & K F D. Quum igitur quinque lineæ F G, F H, F K, F L, & F M sint æquales: erit F Centrum Circuli, per nonam Tertij. Qui secundùm ipsarum quantitatem descriptus, tanget latera Pentagoni, per primam partem decimæquintæ Tertij, Quod erat faciendum.



INITIO constructionis præmonstrat Campanus, lineas A F & E F, diuidentes duos angulos A & E, concurrere intra Pentagonum. Sed hoc constabat ex antecedentis compositione: in qua F G & F H, ad Centrum F terminatæ, probabantur æquales

les. Nam ex huiusmodi constructionibus, Consectaria colligi solent. Quod ex prima Tertij, & decimaquinta eiusdem, moxq́, ex decimaquinta huius, alijsq́, Propositionibus satis multis videre est. Sicut etiam ex hac sequitur, immò ex antecedente: Lineas perpendiculares à punctis medijs laterum Pentagoni eductas, per Centrum Circuli transire, angulosq́; oppositos æqualiter diuidere. Vt hoc loco, A K est linea vna, diuidens angulum A, latusq́, C D æqualiter: ac reliquæ in eundem modum. Quod sic ostenditur.

Spatium illud circa Centrum F, æquale est quatuor rectis: qui in decem æquales diuiduntur, decem lineis in F conuenientibus. Quinque igitur anguli A F M, M F L, E F L, L F D, & D F K sunt duobus rectis æquales. Quapropter A F & F K, per decimam quartam Primi, vnam lineam efficiunt. Eadem & de cæteris lineis erit probatio. Atque hoc in omnibus Figuris æquilateris imparium laterum est perpetuum.

PROBLEMA 14, PROPOSITIO XIIII.

Circa datum Pentagonum æquilaterum & æquiangulum, Circulum describere.

Sit circa datum Pentagonum æquilaterum & æquiangulum A B C D E, describendus Circulus.

Duos angulos A & E diuido in duo æqualia, ductis lineis A F & E F: quæ concurrent intra Pentagonum ad punctum F, vt anteà probauimus.

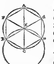


Tum ab ipso puncto F, ad reliquos angulos duco lineas F B, F C, & F D. Et quia duo latera A F & A B, Trianguli A B F, sunt æqualia duobus lateribus A F & A E, Trianguli A E F, & angulus A vnius æqualis angulo A alterius: erit, per quartam Primi, F A æqualis F E: & angulus A B F æqualis angulo A E F. Quumq́; totus B, toti E sit æqualis: erit B diuisus in duo dimidia. Atque eadem ratione vterq́; angulorum C & D diuisus in duo dimidia: ob id, quinque lineæ F A, F B, F C, F D, & F E æquales. Quare, per nonam Tertij: erit F Centrum Circuli, Pentagono A B C D E circumscribendi, Quod faciendum fuit.

PROBLEMA 15, PROPOSITIO XV.

In dato Circulo, Hexagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus Circulus A B C D, cuius Centrum E, cui inscribendum sit Hexagonum æquilaterum & æquiangulum.



Duco Diametrum A E C: & secundùm quantitatem Semidiametri E C, describo Circulum E B D: qui secet priorem in duobus punctis B & D. A quibus, per Centrum E, duco duas B E G & D E F Diametros. Trium verò Diametrorum terminos coniungo sex lineis A F, F B, B C, C D, D G, & G A. Dico A F B C D G, esse Hexagonum quale proponitur.

Erit enim ex Themate primæ Propositionis Primi, vtrunque Triangulorum B E C & C E D æquilaterum: & per quintam eiusdem, æquiangulum. Duo igitur anguli B E C & C E D cum tertio quopiam æquali, efficient, per trigesimamsecundam eiusdem, duos rectos: quum vterque sit tertia pars duorum rectorum. Et quia ijdem B E C & C E D: cum angulo D E G, efficiunt duos rectos, per decimãtertiam eiusdem: erit

erit D E G æqualis vtrique illorum. Sunt itaque sex anguli qui ad E, æquales. Et sex igitur Arcus quos comprehendunt, æquales: per vigesimamquintam Tertij: Quapropter & sex illorum subtensæ æquales, per vigesimamoctauam eiusdem. Æquilaterum igitur Hexagonum. Sed & æquiangulum, per vigesimamsextam eiusdem: propterea quod Arcus in quos cadunt, æquales sunt: nempe singuli tertia pars Peripheriæ, Quod fuit construtum.

ALITER. Sit in Circulo A B C D E, cuius Centrum F, describendum Hexagonum æquilaterum & æquiangulum.

A Centro F duco Semidiametrum F A. Tum ex puncto A, per primam huius, accommodo lineam A B æqualem ipsi Semidiametro: Quam dico esse latus Hexagoni æquilateri & æquianguli.

Connecto F B. Et quia A B est æqualis F A: est & æqualis F B. Triangulum igitur A F B æquilaterum: &, per quintam Primi, æquiangulum. Constituo postmodùm super F Centro, angulum B F C æqualem angulo A F B, vel angulo F B A, quod perinde est, ducta linea F C: & connecto B C. Et quia A F B est tertia pars duorum rectorum, per quintam & trigesimamsecundam Primi: erit & B F C tertia Pars duorum rectorum. Quapropter duo reliqui F B C & F C B, quum sint æquales, per quintam Primi, erunt duæ tertiæ duorum rectorum, per trigesimamsecundam eiusdem.



Vel per quartam Primi, quum angulus B F C sit æqualis F B A, duoq; latera F B & F C sint æqualia duobus A B & B F: erit basis B C æqualis basi B F: quapropter & ipsi F C. Triangulum igitur F B C æquilaterum & æquiangulum. Demùm constituo angulum C F D æqualem vtrique angulorum qui ad F positi sunt, ducta linea F D: & connecto C D. Eritq; iam exposita ratione, Triangulũ F C D æquilaterum & æquiangulum. Quumq; tres anguli qui ad F, duobus rectis sint æquales, est enim vnusquisq; tertia pars duorum rectorum: erit, per decimamquartam Primi, A D linea vna: ob idq;, Diameter Circuli. Alter igitur Semicirculus A F D, in tot partes æquales diuidetur, in quot A B C, totq; æquales subtensas comprehendet. Quare A B est latus Hexagoni æquilateri Circulo inscribendi. Quod & æquiangulum erit: nam dimidium totius B, æquale est totius C dimidio, Quod fuit faciendum.

QVVM igitur duxerimus ab F Centro perpendicularem F E, & connexuerimus B E & C E: effecerimus Triangulum B E C: cuius angulus E qui ad verticem, erit sexta pars duorum rectorum, per decimãnonam Tertij. Nam B F C angulus, ad ipsum duplus. Vterque verò duorum E B C & E C B angulorum ad basin, erit duplus sesquiplex, seu duplus sesquialter, ad ipsum E angulum. Atque hæc erat ars inueniendi lateris Hexagonici. Duæ igitur Demonstrationes modo inductæ, compendiariæ fuerunt.

Poterat etiam inscribi Hexagonum ex Trianguli Æquilateri inscriptione, diuiso vnoquoque trium Arcuum per æqualia.

SED iam hoc Figurarum inscribendarum negotium elucidemus.

Quæcunque imparium sunt laterum Figuræ: eæ Circulo inscribuntur adminiculo Triangulorum Isoscelium, quorum duo anguli qui ad basin, multiplices sint eius anguli qui ad verticem. Triangulum itaque Æquilaterum (quod est primum imparium laterum, atque ob id, tot habet Priuilegia) seipsum explicat: idq; habet ab Vnitate, per quam designatur. Constituto enim Triangulo Isosceli ad Peripheriam, cuius duo anguli qui ad basin, æquales sint angulo qui ad verticem (Æquale verò suiipsius multiplex est, vt Vnitas) ipsa basis erit latus Trianguli Æquilateri Circulo inscribendi. Ac sic Æquilaterum, tanquam Isosceles consideratur.

Pentagonum autem, quod est secundum imparium, reperitur officio Trianguli Isoscelis, cuius vterque angulus qui ad basin, duplus sit eius qui ad verticem: sicut demonstratum est in vndecima huius.

Heptagonum verò, per Triangulum, cuius vterque angulus qui ad basin, triplus sit eius qui ad verticem. Ennagonum, quadruplus: Vndecangulum, quintuplus: Tredecangulum, sextuplus: ac sic continenter.

PARIVM autem laterum Figuræ æquilateræ Circulo inscribuntur officio Triangulorum Isoscelium, in quibus anguli qui ad basin, sint multiplices sesquiplices eius anguli qui ad verticem.

Vt Quadratum (primum parium laterum, atque eam ob causam etiam tot habet priuilegia) inscribitur Circulo, ex Triangulo Isosceli ad peripheriam collocato, cuius vterque angulus qui ad basin, sit sesquiplex, seu sesquialter, eius anguli qui ad verticem. Sed compendij caussa, aliter docuit Euclides in sexta huius. Hexagonum, secundum parium, officio Isoscelis cuius vterque angulus qui ad basin, sit duplus sesquiplex eius qui ad verticem: Octogonum triplus sesquiplex: Decagonum, quadruplus sesquiplex: sicq; in continuum, per Figuras parium laterum. Atque ex ijs innumerabiles abundant meditationes.

At verò imparium laterum Figuræ, ideò difficiliores cognitu, quòd pleræq; ipsarum per numeros Primos repræsententur: Quales sunt 3, 5, 7, 13, 17: ac similes. Sed de his aliàs vberiùs, vt antè polliciti sumus. Hæc tamen in Hexagono docere potius visum est, quòd ipsum sit maximè perspicuum: atque ob eam causam quod per senarium numerum significetur, qui primus est Perfectorum.

Consectarium.

Latus Hexagoni Circulo inscripti, æquale est Circuli Semidiametro.

Hoc verò satis constat ex vtraque Demonstrationum: maximè ex secunda, quæ per Triangula Æquilatera procedit, quorum latera sunt Semidiametri.

EX Campano. Non proposuit Euclides, Circa datum Circulum, Hexagonum æquilaterum & æquiangulum vt describatur: neque vt intra aut circa Hexagonum, Circulus: quòd satis esse putaret de Pentagono proposuisse: ex cuius comparatione, reliquæ species Æquilateræ Circulis accommodabuntur, atque ijsdem Circuli. Illud insuper obseruandum, Omnem Figuram æqualium laterum Circulo inscriptam aut circunscriptam, æqualium quoque esse angulorum. De inscripta constat ex vigesimaseptima & vigesimasexta Tertij: sumptis binis quibusq; Arcubus contiguis, quos duo latera angulum continentia subtendunt De circunscripta autem, ductis lineis à Centro Circuli ad omnes angulos ipsius Figuræ & ad puncta contactuum: sicut ex themate decimætertiæ huius ostenditur.

Hic etiam animaduertemus, quod & suprà in quadragesimasexta Primi monuimus, in Figuris parium laterum, lineas ab angulis per Centrum ad angulos duci: sed in Figuris imparium laterum, ab angulis per Centrum ad latera.

PROBLEMA 16, PROPOSITIO XVI.

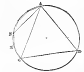
In dato Circulo, Superficiem quindecim laterum æquilateram & æquiangulam inscribere.

Sit in dato Circulo ABCD inscribenda Superficies quindecangula æquilatera & æquiangula.

Intra Circulum, per doctrinam secundæ huius, & primæ eiusdem, applico latus Trianguli Æquilateri: quod sit AC: & , per vndecimam huiusce, latus Pentagoni, quod sit AB, in Arcu AC.

Qualium itaque segmentorum æqualium tota ABCD Peripheria est quindecim, talium Arcus AEC, tertia pars ipsius, erit quinque: & Arcus AB quinta pars eiusdem

ent



erit trium · ob idq́; , residuum B C, duorum æqualium. Secetur, per trigesimam Tertij, Arcus B C bifariam in E puncto. Et erit vterque Arcuum B E & E C, decimaquinta pars totius Peripheriæ. Si igitur coniunxerimus rectas B E & E C : fient duo latera Quindecanguli æquilateri. Et tales tres admittet Arcus A B, sicut astruximus : fientq́, in Arcu A C, quinque decimæquintæ totius Peripheriæ. Qui quum sit tertia pars ipsius, reliquæ duæ tertiæ C D & D A, in tot tantasq́, sectiones diuidentur quarum subtensæ, erunt latera Quindecanguli æquilateri, Quod erat faciendum.

SIMILITER autem vt in Pẽtagono, si per quindecim puncta diuisionũ æqualium Circuli, duxerimus lineas tangentes : circa ipsum Circulum describetur Quindecangulum æquilaterum & æquiangulum : Atque insuper iisdem, quibus illic, obseruationibus, dato Quindecangulo Circulum inscribemus & circunscribemus.

Libri Quarti Geometricorum Elementorum

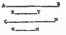
FINIS.

IACOBI PELETARII
CENOMANI IN EVCLIDIS
ELEMENTA GEOMETRICA
DEMONSTRATIONVM
LIBER QVINTVS.

DEFINITIONES.

Pars, est Magnitudo Magnitudinis minor maioris, quum minor maiorem metitur.

In explicandis huius Quinti Definitionibus, Numeros nobis accommodabimus. Id enim disciplinæ gratia in Principiorum ostensione licet: In Demonstrationibus autem Propositionum, Geometrica dignitas seruanda est. Alia quippe ratio & natura Continuorum, atque alia Discretorum. In quibusdam tamen adeò religiosi non erimus : nempe dum Quantitatis vocabulum pro Magnitudine vsurpabimus. Quamuis enim hoc peculiarius, illud generalius sit: vtrunq, tamen Geometria paruo discrimine sibi vendicat. Partem itaq; hoc loco plerique esse putarunt, quæ totum æqualiter diuidit: scilicet quæ aliquoties sumpta, Totum integrè constituit. Ac sic binaria denominatio neque Ternarij, neq, Quinarij, neque vllius imparis integri pars erit: sed tantùm Quaternarij, Senarij, & parium. Sed meo iudicio, non rectè accipiunt. Neque enim Proportiones aliter quàm generatim considerandæ sunt. Atque vt in Discretis, omnis Numerus est pars aut partes maioris : sic & in Proportionum materia, omnis Magnitudo pars est aut partes maioris, quum Proportio rationalis est: hoc est, per numeros explicabilis. At dices, Euclides hoc loco Partem non sic definitam esse vult, vt ad Totum referatur, sed ad Multiplex. Verum id quidem est: alioqui nihil opus fuisset Definitione Partis, quæ satis ex superioribus nota erat. Sed Multiplex aliter sumēdum quàm ipsi putent. Quinarius enim Binarij multiplex est, quum sit ipsius duplex sesquiplex, seu mauis, duplus sesquialter: Immò & Ternarius ipsius Binarij, sicut & Vnitas suijpsius, multiplex est. Sed quum difficile sit, præsertim inter docendum, superpartientia & superparticularia in partes suas distinguere, ob inæqualitatem: in Demonstrationibus partes æquales assumuntur. In ijs verò quæ non de industria ponuntur Magnitudinibus, proportiones sunt fortuitæ. Quapropter si linea A B fuerit lineæ E F, verbi gratia, dupla sesquialtera: lineaq; C D fuerit lineæ G H itidem dupla sesquialtera: erit vtique A B ipsius E F, vt C D ipsius G H æquemultiplex. Pars igitur hoc loco accipienda, ac si dicas submultiplex: & eatenus considerVanda, quatenus ad integrum habet rationem aliquam quæ per numeros exponi possit: Quod vox *metitur* satis indicat. Ex hoc consequitur Multiplicis Definitio,



2 Multiplex, est Magnitudo maior minoris, quam metitur minor.

Hæc

Hæc autem ex ſuperiori ſatis manifeſta eſt. Sunt enim hæ voces mutuæ, ſeu, vt vocant, ad aliquid. Senarius igitur, quem Binarius metitur; ſed & Quinarius, eiuſdem Binarij multiplex eſt.

3 Ratio eſt duarum Magnitudinum eiuſdem generis quædam habitudo inter ſe.

Ratio ſeu Proportio inter eas aduenit Magnitudines, quæ ſunt eiuſdem generis. Vt enim neque Numerum ad Sonum, neque Tempus ad Locum rectè quiſquam comparauerit; ſic neque Lineam ad Superficiem, neque Superficiem ad Solidum. Linearum verò ad Lineas, Superficierum ad Superficies, & Solidorum ad Solida conueniens fiet collatio. Quædam autem dicitur, non certa. Omnis enim Linea ad alteram habet rationem aliquam, non tamen certam. Atque eiuſmodi Quantitates dicuntur irrationales, incommenſurabiles, ſeu incommunicantes: qualis eſt lateris Quadrati ad Diametrum. Certæ vero rationes ſeu nominatæ, ſunt quæ per Numeros indicantur. Quarum denominationes ex Arithmeticis petuntur.

4 Proportionalitas, eſt Proportionum ſimilitudo.



Vt ſi dicatur ea eſſe proportio A ad B, quæ eſt C ad D: eiuſmodi ſimilitudo ſeu comparatio, Proportionalitas vocatur. Malè igitur verterunt quidam, Proportionem loco Proportionalitatis. ἀναλογία enim aliàs Proportionem ſignificat Quintiliano: hic vero Proportionum ſimilitudinem, quam Proportionalitatem diximus, vtcunque vox parum Latina ſit: quales & huc ſatis multæ incidunt.

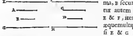
5 Rationem habere inter ſe Magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ, poſſunt altera alteram excedere.

Non poterat alio ingenio vim ſubſtantiamq́; Rationis inter Magnitudines exponere, quàm Multiplicationis vocabulo: vt etiam incommenſurabiles includeret. Exceſſus enim, index comparationis Quantitatum. Quum ergo latus Quadrati multiplicatum poſſit Diametrum excedere. Diameter item multiplicata, Peripheriam: habebit rationem latus ad Diametrum: atque inde Diameter ad Peripheriam, licet incognitam. Atque ex hoc loco ſatis colligitur, Angulum, quem contactus vocauit Euclides in XV Tertij, quantitatem non eſſe: quum multiplicatus nullam magnitudinem poſſit excedere: immo, quum multiplicari non poſſit; vt illîc demonſtrauimus. Multiplicationem autem hoc loco accipiemus, pro eo augmento quod fit in partes, quas vocant homogeneas. Linea enim multiplicata, id eſt, aucta partibus ſui ſimilibus, lineam excedet; ſed non ſuperficiem: ſicq́; ad ſuperficiem non habebit rationem.

6 In eadem ratione Magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundam vt tertia ad quartam: quum primæ & tertiæ æquemultiplicia, ſecundæ item & quartæ æquemultiplicia, fuerint primum ſecundo & tertium quarto ſecundùm quanuis multiplicationem, aut ſimul æqualia, aut ſimul maiora, aut ſimul minora.

Quia in Geometricis plerunque Rationes occurrunt incognitæ: ſeu innomina-

tæ ad earum probationem, Æquemultiplicium officium nobis accersimus quæ quidem variè comparamus, ut scopum attingamus. Hoc igitur innuit Definitio, Si fuerint quatuor Magnitudines, videlicet A prima, B secunda, C tertia, & D quarta: sumantur autem ipsarum A & C æquemultiplicia E & F, itemq; ipsarum B & D alia vtcunque æquemultiplicia G & H: itaque res cadat, si E & G sese inuicem æquent, aut sit alterum altero maius: etiam F & H sese inuicem æquare, aut esse alterum altero maius: Erit tum A ad B, sicut C ad D. Scilicet, si E & F per duplum auctis, sed G & H, verbi caussa, per triplum: sit E æquale G, & simul sit F æquale H: aut si E sit maius G, sit simul F maius H: aut si minus, minus: idq; semper fiat, seu per triplum, seu per quadruplum, seu per quancunque denominationem sumantur æquemultiplicia: erit omninò A ad B sicut C ad D. Erat igitur huius Definitionis sententia, Quum primæ & tertiæ æquemultiplicia, aliaq; secundæ & quartæ vtcunq; æquemultiplicia sic fuerint, vt si multiplex primæ æquale fuerit multiplici secundæ, sit & multiplex tertię æquale multiplici ipsius quartæ: & si maius, maius: & si minus, minus: Erit prima ad secundam, vt tertia ad quartam. Sed in hæc verba non pronuntiauit Euclides, ne Theorematis speciem daret, non Principij. Multò minus sic pronuntiauit, In eadem ratione Magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam vt tertia ad quartam: quum primæ & tertiæ æquemultiplicia, secundæ item & quartæ æquemultiplicia, fuerint primum ad secundum, vt tertium ad quartum. Ignotum enim per æquè ignotum definisset.



At dices, Tam difficilis est, immò fortassè difficilior huiusmodi æqualitas aut excessus Æquemultiplicium, quàm simplicium inter se ratio. Non est sanè Maiorum enim Quantitatum facilior est comparatio, ob partium numerum. Multiplicia enim pro arbitrio collocare & accommodare possumus, & ex ipsorum artificiosa cõstructione, simplicium rationem colligere. Præterea, quum duas Magnitudines duabus confero: vnum tamen vni confero, nempe rationem rationi: sicq; intra binarium consisto. Quum verò multiplicia multiplicibus: quaternarium considerem oportet, nempè multiplex primæ, secundæ, tertiæ, & quartæ cum simplicibus ipsis. Atqui latius patet quaternarius binario. Quum igitur tractabiliora sint æquemultiplicia, iure obijci non poterit, quod ignotum per æquè ignotum ostendatur. Huc accedit quòd quum mox egeremus Incontinua Proportionalitate, eius omnino fuit facienda mentio sub Definitionis titulo: ne in Demonstrationibus futuris ingenia auscultantium interciperentur, re inaudita. Nemo itaque offendatur quòd Principium difficile sit. Definitiones enim subtiles esse nihil vetat, præsertim quum res complicata definitur, qualis est ratio Magnitudinum. Nam & in traditionibus Dialecticis sæpe euenit, vt Definitum celerius promptiusq; capiamus, quàm Definitionem ipsam. Nemo enim est qui prius non capiat Hominem, quàm animal rationale. Quum verò substantiã Hominis cognoscere cupimus, tum nobis plenius satisfacit Definitio.

Possunt autem eiusdem esse generis Magnitudines: & possunt non esse. Dicemus enim, sicut Linea ad Lineam, ita Lineam ad alteram: sed & sicut Linea ad Lineam, ita Superficiem ad Superficiem.

Neque omittendum duxi, quòd hoc loco Euclides generatim locutus est, sicut prima ad secundam ita tertia ad quartam: vt vtranque intelligeremus & Continuam & Incontinuam Proportionalitatem. Vtrobique enim quatuor sunt Magnitudines: in hac expressæ, in illa tacitæ. Nam quum dicimus cõtinuè, sicut A ad B ita B ad C quatuor sunt Magnitudines. Nam ipsa B magnitudo, duarum vicem supplet, dum consequitur & antecedit. Itaque non ex Euclidis sententia fecerunt, qui Continuam Proportionalitatem separatim definierunt: vt hîc Campanus quinta sua Definitione. Nam quæ vtriusque sunt propria, hoc loco Euclides dissimulauit, communiter

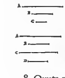
ambas

amhas vna hac sexta Definitione complexus.

Quod verò dicitur, primum secundo & tertium quarto: hunc sensum habet, vt inæqualitatis & excessus ratione, conferatur multiplex primæ, multiplici secundæ: & multiplex tertiæ, multiplici quartæ: licet initio multiplex primæ cum multiplici tertiæ: & multiplex secundæ cum multiplici quartæ coniungendum fuerit.

Hanc Definitionem quam potuimus clarissimè explicauimus: vt controuersiam abigeremus ex huius Quinti Definitionibus ortam. Nam qui in his Campanum reprehendunt, meo iudicio non rectè reprehendunt. Neque enim Euclidem non intellexit: Sed dum voces easdem identidem inculcat (quæ res ferè vna Proportionum materiam obscuram facit): ipse in orationis implicationem se conijcit: ob Dialecticæ, vt apparet, ignorantiam. Vnicuique tamen quod liberè sentiat de Campano relinquimus, dummodò nos Proportiones Geometricè tractemus.

7 Magnitudines verò quæ in eadem sunt ratione, Proportionales dicuntur.



Quantitates inter quas est rationum similitudo, quæ anteà Proportionalitas vocata est, Proportionales dicuntur. Vt si fuerit A ad B sicut B ad C: erunt A, B, & C proportionales. Atque hæc Proportionalitas Continua: nam inter singulas continuatur ratio, propterea quòd media consequitur ad primam, & antecedit ad tertiam. Si verò fuerit A ad B sicut C ad D: erunt & hæ quatuor proportionales, sed incontinuè: quia binæ distinguntur, ac velut interrumpuntur. Singulæ enim vnicam habent denominationē aut Antecedentis aut Consequentis.

8 Quum multiplex primæ excesserit multiplex secundæ, multiplex verò tertiæ non excesserit multiplex quartæ: maiorem rationem habere dicetur prima ad secundam, quàm tertia ad quartam.

Hæc manifesta est ex Sexta. Scilicet, Quatuor Magnitudinum nunquam maior est proportio primæ ad secundam quam tertiæ ad quartam, quin contingat aliqua æquemultiplicia primæ & tertiæ collata ad aliqua secundæ & quartæ æquemultiplicia, sic se habere, vt multiplex primæ excedat multiplex secundę, neque multiplex tertiæ excedat multiplex quartæ. Neque hoc contingit vnquam, quin maior sit proportio primæ ad secundam, quàm tertiæ ad quartam. Et hæc dicetur maior Improportionalitas. Quum verò multiplex primæ minus fuerit, quàm multiplex secundæ: neque multiplex tertiæ minus fuerit, quàm multiplex quartæ: erit minor ratio primæ ad secundam, quàm tertiæ ad quartam. Atq; hæc minor Improportionalitas dicetur.

9 Proportionalitas, minimùm, in tribus est terminis.

Quia duarum Magnitudinum collatio tantum ratio est, non rationum similitudo: fit vt duæ, Proportionalitatem non constituant. Tres itaque, minimùm, debent esse: Qui numerus Continuam semper Proportionalitatem constituit. Possunt autem & in Continua quatuor esse quantitates: hoc est, tam impari quàm pari numero. At in Incontinua, neque pauciores quàm quatuor, neque impari sunt numero. Quod qui attentiùs considerauerit, comperiet Euclidem hac ratione inductum, Proportionalitatem Continuam & Incontinuam non separasse.

Meminisse tamen oportet, Parem numerum preesse omni Proportionalitati. Nam quum dico vt A ad B ita B ad C: duarum rationum fit comparatio, vt anteà diximus,

mus, Itaque Binarij vim sic innuit Euclides,

10 Quum tres Magnitudines fuerint proportionales: dicetur proportio primæ ad tertiam sicut proportio primæ ad secundam duplicata.

Definit Proportionalitatem trium Quantitatum. Cuius Definitionis explicatio hæc est. In proportionalitate trium Quantitatum, latet Quadrati natura. Scilicet tantum producunt duo extremi termini inter se, quantum medius in se. Ob id, proportio extremorum inter se, est duplum proportionis primi ad secundum. Quod nisi per Numeros satis definitè exponi nequit. Sint 2 ad 4, vt 4 ad 8. Hæc est proportionalitas Continua in dupla ratione. Duco 2 in 8, fiunt 16: & tantundem producunt 4 in se. Itaque, ex definitione, erit proportio 2 ad 8, denominata à Quadrato Binarij, proportionem primi ad secundum denominantis: nempè quadrupla. In tripla ratione, sint 2 ad 6 vt 6 ad 18. Denominationem proportionis primi ad secundum, nempè 3, duco in se: fiunt nouem, denominator proportionis 2 ad 18. Atque hæc est Definitionis sententia; ex qua binarij, ternarij, & quaternarij elicitur mira colligatio. Nam in tribus Quantitatibus quatuor insunt: atque huius affinitatis, binarius est index. Huius enim numeri singularis proprietas est, quod tantùm efficiat duplicatus, quantum in se ductus. Ea re Euclides duplicatam proportionem dixit, quasi quadratam: propterea quòd binarius Quadrati est index: vt cæteræ denominationes naturam primæ sequerentur: scilicet tripla proportio duplicata, eadem esset quæ in se ducta. Quadratum itaque per Binarium significatur, sicut Cubus per Ternarium, Quadratumquadrati, seu, vt vulgò dicũt, Censuscensus, per Quaternarium: & Supersolidum, Relatum primum dicunt, per Quinarium: sicq; infinitè: Quod nos satis luculenter exposuimus in priore libro nostræ Algebræ. Quum igitur Quantitatem quantitati comparamus, vnitas repræsentatur in Numeris: in Cõtinuis, linea. Trium verò Quãtitatum collatio in Numeris, Quadratum: in Continuis, Superficiem: quatuor denique proportio in Numeris, Cubum: in Continuis, Solidum. Hæc autem speculatio in immensum patet. Hinc pendet Definitio sequens.

11 Quum quatuor Magnitudines continuè proportionales fuerint: dicetur proportio primæ ad quartam sicut primæ ad secundam triplicata; ac semper ordine vna plus, donec sit absoluta proportionalitas.

Quatuor Quantitatum continua proportionalitas, Cubi includit naturam: sicut trium, Quadrati, vt modò diximus. Cubi autem index est Ternarius. Proportio itaque primæ ad quartam, est proportio primæ ad secundam triplicata: nempè Denominatore in se cubicè ducto. Vt in Numeris, sint 2 ad 4 vt 4 ad 8 & 8 ad 16 Denominator Proportionis, est Binarius. Duco itaque Binarium in se cubicè, fiunt 8: & tanta est proportio primi ad quartum: scilicet, 2 ad 16, octupla. In quinque autem Positis, erit proportio Primi ad quintum quadrupla quàm Primi ad secũdum: In sex, quintupla: sicq; continenter, donec ad vltimum par Magnitudinum perueniamus. Atque hæc est Definitionis sentẽtia, Sed quia natura supra Corpus nihil habet quod sensui exponat, in Geometria non considerantur proportionalia vltra quatuor Posita, In Numeris autem, qui sunt velut interpretes quidam rerũ continuarum, vt omnia quæ formam habent, infinita esse ostenderentur, apertè in immensum exurgunt progressiones Proportionalitatum, omniumq; specierum quæ normam recipiunt: Quasi sensus finitus, Intellectus verò interminatus esse comprobetur. Huc autem Numeros afferre fuit necessarium. Dupla enim & tripla ratio, Numerationem præ se fert: neque aliter quàm per Numeros expediri potest.

12 Simi

12 Similis rationis Magnitudines dicuntur, Antecedentia antecedentibus & Conſequentia conſequentibus.

Similitudinem Rationum antreà propoſuit: hoc eſt, Proportionalitatem: hîc ſimilis rationis Magnitudines ſuis appellationibus nuncupat. ac ſi diceret, Magnitudines Proportionales ſignificantur, quatenus antecedunt & conſequuntur. Scilicet, ſumuntur æquemultiplicia Antecedentium, & æquemultiplicia Conſequentium: vt ex ijs proportionalitatem Magnitudinum colligamus. Hanc itaque appoſuit Euclides, vt vocabula, quæ dicunt, artis exprimeret. Antecedentium autem & Conſequentium variæ ſunt comparationes: quæ Definitionibus ſequentibus explicantur.

13 Permutata Ratio, eſt acceptio Antecedentis ad antecedens, vt Conſequentis ad conſequens.



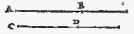
Prima comparatio Magnitudinum, quæ pronuntiatione naturali, eſt vnius Antecedentis ad ſuum Conſequens, ſicut alterius Antecedentis ad ſuum Conſequens, dux eſt atque origo cæterarum comparationum: ac primùm Permutatæ: in qua mutatur ſecundum Antecedens in prius Conſequens, & prius Cōſequens in ſecundum Antecedens. Vt ſi fuerit A ad B ſicut C ad D: & concludatur, A ad C ſicut B ad D: hæc Permutata dicetur Ratio.

14 Conuerſa Ratio, eſt acceptio Conſequentis tanquam antecedētis, ad Antecedēs tanquā cōſequens.



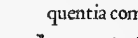
In hac conuertuntur duo Conſequentia in duo Antecedentia, & contrà. Vt ſi fuerit A ad B ſicut C ad D: & concludatur conuerſo modo, B ad A ſicut D ad C.

15 Coniuncta ſeu Compoſita Ratio, eſt acceptio Antecedentis cum conſequente inſtar vnius, ad ipſum Conſequens.



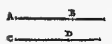
Vt ſi fuerit A ad B ſicut C ad D: & concludatur, totum A B ad B ſicut totum C D ad D: dicetur Coniuncta ſeu Compoſita Ratio.

16 Diſiuncta ſeu Diuiſa Ratio, eſt quum augmenta Antecedentium ſupra Conſequentia, ad ipſa Conſequentia comparantur.



Vt ſi fuerit totum A B ad B ſicut totum C D ad D: & concludatur, A ad B ſicut C ad D. Et eſt cōuerſus modus Coniūctæ.

17 Euerſa Ratio, eſt quum Antecedentia comparantur ad exceſſus quos habent ſupra Conſequentia.

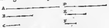


Euerſio Rationum, fit quum Antecedens comparatur cum ea quam habet ad Conſequens differentia. Vt ſi fuerit A B ad B ſicut C D ad D: & concludatur, ſicut A B ad A, ita C D ad C.

18 Aequa Ratio dicitur, quum plures Magnitudines hinc inde æquali numero ſumptæ, & binæ compa-

ratæ fuerint:tum æquali mediorum numero sublato, fit extremorum vtrinque comparatio.

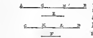
Vt si sumantur Magnitudines A, B, & C: aliæq; totidem D, E, & F: siue sint eiusdem generis cum primis, siue diuersi: fuerintq; secundæ inter se in eadem ratione qua primæ: siue eodem ordine, vt si dicatur A ad B sicut D ad E, & B ad C sicut E ad F: siue ordine conuerso, vt si dicatur A ad B sicut E ad F, & B ad C sicut D ad E: atq; omissis medijs vtrisq; B & E, concludatur A ad C sicut D ad F: Hæc argumentandi ratio dicetur, ab Æqua Proportionalitate.



THEOREMA PRIMVM, PROPOSITIO PRIMA.

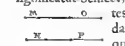
SI quælibet Magnitudines totidem Magnitudinum singillatim æquemultiplices fuerint: quàm multiplices sunt singulæ singularum, tam multiplices erunt omnes omnium.

Sint Magnitudines A B & C D, totidem Magnitudinum E & F æquemultiplices: scilicet A B ipsius E, & C D ipsius F. Dico, quammultiplex est A B ipsius E, & C D ipsius F: tam multiplices esse ambas A B, C D, ambarum E, F.



Quoniam enim æquemultiplex est A B ipsius E, vt C D ipsius F: quot in A B sunt Magnitudines, æquales ipsi E, totidem erunt & in C D ipsi F æquales. In A B igitur sint Magnitudines A G, G H, & H B, æquales ipsi E. & in C D sint totidem numero Magnitudines, C K, C L, & L D, æquales ipsi F. Quum itaque multitudo Magnitudinum in A B & in C D sit eadem: sitq́ A G ipsi E æqualis, & C K ipsi F: erunt, per communem Notionem, duæ A G & C K simul sumptæ, duabus E & F simul sumptis æquales. Quumq́ G H sit eidem E æqualis & K L eidem F: erunt quoque G H & K L simul sumptæ, ipsis E & F simul sumptis æquales. Atque eadem ratione H B & L D simul sumptæ, iisdem E & F simul sumptis æquales. Quot igitur in A B sunt Magnitudines æquales ipsi E, quotq́ in C D ipsi F: tot sunt in A B & C D simul sumptis, ipsis E & F simul sumptis æquales. Quammultiplex igitur est A B ipsius E, & C D ipsius F: tam multiplices sunt A B, C D, ipsarum E, F, Quod erat ostendendum.

QVVM autem huius primæ Propositionis vim rationemq́ perpenderimus, totam in communi iudicio sitam esse intelligemus. Nam quum dicitur, Si æqualibus æqualia addantur, coniuncta æqualia fieri: nihil aliud quàm æqualitas proportionum significatur. Scilicet, si fuerit M æqualis N: & O æqualis P: quatuor habeo Quantitates proportionales. Est enim sicut M ad N, ita O ad P. Si igitur addamus O ipsi M, & P ipsi N: fiet totum M O, æquale toti N P. Ita, quum dico A B triplum esse ipsius E, & C D ipsius F: hoc tacitè dico, si A B addatur ad C D, & E addatur ad F: totum A B, C D, esse triplum totius E, F.



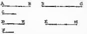
Sic æqualitas omnes Proportionũ species dirigit & gubernat. Ac quemadmodum æqualitas æqualitati addita, æqualitatem conseruat: ita multiplicitas, vt sic dicam, multiplicitati addita, proportionalitatem retinet similem. Sed in quatuor Magnitudinibus aut pluribus æqualibus, nihil refert quæ cui præponatur: Mutato enim ordine, non mutatur denominatio. Quum verò occurrit inæqualitas, distinctiùs animaduertendum est. Maiori enim arte opus est, in iis, quæ non ordine collocata, confusionem parere solent. Tota igitur Proportionum materia ferè in communi intelligentia consistit. Nam quod tam difficilis habita sit, ex præsumpta quadam opinione factũ est. Proportionũ enim tractatio obscura non est: sed eam ad vsum traducere, id demùm operosum est. Aliud enim est artem tenere, & aliud ad rem suam conuertere. Sicut in rebus gerendis, quid optimum sit multi in otio scienter disputant. At quum in rem præsentem ventum est: quod ex vsu est, vix vnus aut alter exequi meminit. Multas itaque Propositiones in hunc Quintum Librum Euclides contulit, quæ pro Principiis habendæ fuerant. Sed id exquisitè fecit, vt significaret, Propositionum quidem cognitionẽ in medio esse positam, sed earum vsum difficilem. Hunc igitur Librum

brum diligenter amplectantur qui Geometriam seriò facere volent Geometria enim quantacunque est, tota in Proportionibus est: neque aliud quicquam spectat, quam vt Lineas Lineis, Superficies Superficiebus, & Corpora Corporibus componat & comparet. Atque hæc in hac prima Propositione præfari, non abs re nobis visum est.

THEOREMA 2, PROPOSITIO II.

Si prima secundæ æquè fuerit multiplex vt tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æquemultiplex vt sexta quartæ: prima quoq, & quinta, secundæ æquemultiplex erit vt tertia & sexta quartæ.

In hac de sex Magnitudinibus agitur. Sit itaque AB prima, C secunda, DE tertia, F quarta: BG quinta, & EH sexta: sitq; prima AB, secundæ C, vt tertia DE, quartæ F æquemultiplex: Et quinta rursus BG, eiusdem C secundæ: vt sexta EH, eiusdem F quartæ æquemultiplex. Dico compositam ex prima & quinta, scilicet AG, ipsius secundæ C æquemultiplicem, vt compositam ex tertia & sexta, scilicet DH, ipsius quartæ F.

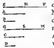


Quoniam enim AB ipsius C æquè est multiplex, vt DE ipsius F: quot in AB sunt Magnitudines ipsi C æquales, tot & in DE ipsi F. Rursus quoniam BG æquè est multiplex eiusdem C, & EH eiusdem F: quot in BG sunt Magnitudines ipsi C æquales, tot & in EH eidem F. Quot igitur sunt Magnitudines in tota AG ipsi C æquales, tot sunt & in tota DH ipsi F æquales. Quammultiplex igitur est composita AG, ipsius C secundæ, tam multiplex est, per antecedentem, composita DH, ipsius F quartæ, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 3, PROPOSITIO III.

Si primum secundi æquè fuerit muliplex vt tertiũ quarti, sumantur autem æquemultiplicia primi & tertii: erunt quoque multiplex primi, ad secundum, & multiplex tertii, ad quartum æquemultiplicia.

Hûc etiam sex interueniunt posita. Sit enim primum A, secundi B, vt tertium C, quarti D æquemultiplex: sumanturq; ipsorum A & C, æquemultiplicia EF & GH. Dico EF ipsius B, vt GH ipsius D æquemultiplex.



Quoniam enim æquemultiplex est EF ipsius A, vt GH ipsius C: quot in EF sunt Magnitudines æquales ipsi A, tot in GH erũt Magnitudines æquales ipsi C. Ponantur itaque in EF Magnitudines EK & KF, æquales ipsi A: & in GH totidem Magnitudines GL & LH, æquales ipsi C. Et quoniam æquemultiplex est A ipsius B, vt C ipsius D: erit quoq; EK ipsius B æquemultiplex, vt GL ipsius D. Ac per hoc, æquemultiplex est KL eiusdem B, & LH eiusdem D. Quoniam igitur, vt ponit secunda huius, primum EK, secundi B æquè est multiplex vt tertium GL, ipsius D quarti: est autem & quintum KF, ipsius B secundi æquemultiplex, vt sextum LH ipsius D quarti: Et compositum igitur primum & quattum EF, ipsius B secundi æquè erit multiplex, per eandem, vt tertium & sextum GH, ipsius D quarti, Quod erat demonstrandum.

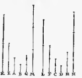
THEOREMA 4, PROPOSITIO IIII.

Si primum ad secundũ eandem habuerit rationem quam

tertium

tertium ad quartum, primi autem & tertii Aequemultiplicia sumantur, itemq; secundi & quarti: ipsa quoque Aequemultiplicia iuxta quãuis multiplicationem, eandem inter se rationem habebunt.

Sit eadem ratio A primi ad B secundum & C tertij ad D quartum: sintq́, E ad A & F ad C: itemq́, G ad B & H ad D æquemultiplicia. Dico esse E ad G sicut F ad H.



Sumantur K ad E & L ad F: itemq́, M ad G & M ad H, æquemultiplicia. Et quia E & F sunt ipsorum A & C æquemultiplicia: itemq; K & L ipsorum E & F æquemultiplicia: erunt, per antecedentem, K & L ipsorum A & C æquemultiplicia: ac per eandem, M & N ipsorum B & D æquemultiplicia. Quare, per cõuersionem sextæ Definitionis, K ad M & L ad N similiter se habebunt in addendo, minuendo, & æquando. Quia ergo K & L, ipsorum E & F sunt æquemultiplicia: itemq; M & N ipsorum G & H: erit, per eandem directam, E ad G sicut F ad H, Quod erat demonstrandum.

LEMMA, seu sumptio. Quoniam igitur constitit si K excedit M, etiam L excedere N: & si æquale, æquale: & si minus, minus: atque ob id, si M excedit K, etiam N excedere L: & si æquale, æquale: & si minus, minus: Erit ex hoc, G ad E & H ad F eadem ratio. Hinc consequitur,

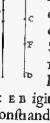
Si quatuor Magnitudines proportionales fuerint, conuerso quoque modo proportionales erunt.

Hoc est, si fuerit sicut A ad B, ita C ad D: erit & sicut B ad A, ita D ad C. Hæc igitur Conuersam rationem probat, quam in decimaquarta Definitione posuerat Euclides.

THEOREMA 5, PROPOSITIO V.

Si Magnitudo Magnitudinis æquè fuerit multiplex vt ablata ablatæ: erit & reliqua reliquæ tam multiplex, quàm tota totius.

Sit tota AB totius CD æquemultiplex, vt ablata AE ablatæ CF. Dico reliquam EB reliquæ DF tam multiplicem, quàm est tota AB totius CD.



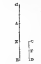
Quàm multiplex est AE ipsius CF, tam multiplex fiat EB ipsius CG. Eritq;, per primam huius, quàm multiplex AE ipsius CF, tam multiplex AB ipsius GF. At quàm multiplex est AE ipsius CF, tam multiplex est AB ipsius CD, per hypothesin. Et AB igitur vtriusque GF & CD est æquemultiplex. Æqualis est itaq;, per communem Notionem, GF ipsi CD: quapropter ablata communi CF: erit reliqua GC, reliquæ FD æqualis. Sed EB æquemultiplex posita est ipsius GC vt AE ipsius CF. Igitur tam multiplex est EB ipsius FD, quàm multiplex est AE ipsius CF. Atqui per hypothesin, AE tam multiplex est ipsius CF, quàm tota AB totius CD. Et EB igitur ipsius FD tam multiplex, quàm tota AB totius CD, Quod erat demonstrandum.

HÆC Demonstratio, vt vulgata, ita certa est. Sed tamen quia id exigit quod nondum docuit Euclides; scilicet vt tam multiplex fiat EB ipsius CG, quàm multiplex est AE ipsius CF: scrupulo non vacat, apud eos præsertim qui res perspicaciùs examinant. Nam si linea AE esset, verbi gratia, triplex ipsius CF: qua ratione fiet EB

triplex ipsius C G, quum id non antè doceat Euclides quàm in duodecima Sexti. Duriusculũ enim est vt id cogamur facere aut concedere, quod posterius erit ediscendũ.

Huic igitur obiectationi sic occurremus, vt dicamus hanc diuisionem in hunc locum tantùm recipi doctrinæ gratia: scilicet vt procedat Demonstratio, non quò sit ad vsum præsentem exquisitè necessaria. Ponimus enim Lineam Lineæ æqualem: licet huiusmodi æquationem nondum didicerimus. Sunt enim hypotheses liberæ: vt disciplinarum fundamenta iaciantur.

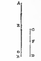
Sed tamen hunc scrupulum vitabimus hac ratione. Sit Magnitudo A B Magnitudinis C D æquemultiplex, vt ablata A E ablatæ C F. Dico reliquam E B reliquæ D F æquemultiplicem, vt totam A B totius C D.



Quàm multiplex est A E ipsius C F, tam multiplex ponatur A G ipsius F D. Eritq́, per primam huius, quàm multiplex A E ipsius C F, tam multiplex E G ipsius C D. Sed sic fuit multiplex A B eiusdem C D. Sunt igitur E G & A B æquales. Communis auferatur A E: erit A G ipsi E B æqualis. Et quia sicut A E ad C F (ob idq́, sicut A B ad C D) ita A G ad F D: erit & sicut A B ad C D, ita E B ad C F, Quod erat demonstrandum.

Alivd igitur est, lineam terminatam & coactam (qualis hoc loco est E B) in partes necessarias secare: & aliud, lineæ terminatæ, qualis est F D, partes æquales creare, vt in A G. Demonstrationem tamen aliorum nolui omittere: quòd subtilis sit, & ad similes reperiendas ingenium acuat.

Probabimus & ab impossibili. Sit tota A B totius C D tam multiplex, quàm ablata A E ablatæ C F. Dico reliquam E B reliquæ D F tam multiplicem, quàm tota est A B totius C D.



Si enim non tam sit multiplex, erunt in E B aut plures aut pauciores Magnitudines ipsi F D æquales, quàm in A E ipsi C F. Sint ergo, si possint, plures: Et ponatur E G tam multiplex ipsius F D, quàm A E ipsius C F. Eritq́, per primam huius, tam multiplex A G ipsius C D, quàm A E ipsius C F. Sed A B posita est tam multiplex ipsius C D, quàm eadem A E eiusdem C F. Erit igitur, per communem Notionem, A G ipsi A B æqualis, pars toti, Quod est absurdum. Simili argumentatione probabimus pauciores non esse Magnitudines in E B æquales ipsi F D, quàm in A E, ipsi C F. Sunt igitur totidem multitudine. Quare & totidem quot in tota A B toti C D, Quod fuit demonstrandum. Hoc Theorema Campanus sic proponit,

Si fuerint duæ Quantitates, quarum vna sit pars alterius, minuaturq́; ab vtraque ipsarum ipsa pars: erit reliquum reliqui vt totum totius æquemultiplex.

Partem hoc loco pro Submultiplici sumit. Sit itaq; Quãtitas A B tanta pars Quantitatis C D, quanta E B ipsius A B: minuaturq́; A B ex Quantitate C D, & reliquum sit F C: vt F D sit æqualis A B. minuatur etiam E B ex Quãtitate A B, & sit reliquum E A. Dico reliquum F C tam multiplex esse reliqui A E, quàm multiplex est totum C D totius A B.



Quum enim F D sit æqualis A B, erit F D ita multiplex E B vt C D est multiplex A B. Ponam itaque D G tam multiplicem A E, quàm F D est multiplex E B. Eritq́, per primam huius, F G tam multiplex A B, quàm F D est multiplex E B. Et quia sic fuit C D multiplex A B, vt F D multiplex E B: erit vtraque duarum Quantitatum C D & F G æqualiter multiplex Quantitatis A B. Quapropter, ex communi Notione, C D & F G sunt æquales. Dempta igitur F D ab vtraque ipsarum: erit C F æqualis D G. Et quia D G sic fuit multiplex A E sicut F D multiplex E B: ob id, sicut A B multiplex E B: ob idq́, sicut C D multiplex A B: erit

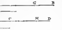
C F

CF ita multiplex AE vt tota CD totius AB, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 6, PROPOSITIO VI.

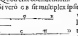
Si duæ Magnitudines duarum Magnitudinum æquemultiplices fuerint, auferanturq́; aliquæ earundem æquemultiplices: erunt & reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æquemultiplices.

Sint duæ Magnitudines, AB quidem, Magnitudinis E: & CD, Magnitudinis F æquemultiplices: & ablatæ ex his AG & CH, earundem E & F æquè sint multiplices. Dico reliquas GB & HD eisdem E & F aut æquales, aut ipsarum æquemultiplices.



Sit enim primùm GB æqualis ipsi E. Dico & HD ipsi E esse æqualem. Ponatur ipsi F æqualis CK. Et quoniam æquemultiplex est AG ipsius E vt CH ipsius F: æqualis autem GB ipsi E, & CK ipsi F: æquè igitur, per primam huius, est multiplex AB ipsius E, vt HK ipsius F. Æquè autem ponitur multiplex AB ipsius E, vt CD ipsius F. Æqualis igitur est HK ipsi CD. Communis auferatur CH. Reliqua igitur CK, reliquæ HD est æqualis. Sed F ipsi CK est æqualis. Quare & F ipsi HD est æqualis, Quod erat ostendendum.

Si verò GB sit multiplex ipsius E: ponam CK ipsius F æquemultiplicem. Eritq́,

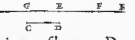


vt priùs, AB ipsius E æquemultiplex, per primam huius, vt HK ipsius F. Sed & sic posita fuit æquemultiplex AB ipsius E vt CD ipsius F. Erit igitur HK ipsi CD æqualis. Et ablata communi CH, reliqua CK, reliquæ HD æqualis. Quare quum GK sit ipsius F æquemultiplex vt GB ipsius E: erit & HD ipsius F æquemultiplex vt GB ipsius E, Quod fuit demonstrandum.

HÆC Demonstratio prima specie videbitur non planè satisfacere menti Euclidis. Nego enim, inquiet aduersarius, ablatam GB posse esse æqualem ipsi E: nego id quoque, posse esse multiplicem eiusdem. quin tu hoc proba.

Sed id propiùs intuenti probatione non indigebit. Nam quum AB sit multiplex ipsius E: erunt aliquot Magnitudines in AB æquales ipsi E. Quumq́, AG itidem sit multiplex ipsius E: erunt & aliquot Magnitudines in AG æquales ipsi E, sed pauciores quàm in AB. Supererit ergò, vt reliqua GB sit aut æqualis ipsi E, aut eiusdem multiplex.

VT tamen omni ex parte integram demus Demonstrationem, Sit Magnitudo AB, Madnitudinis CD multiplex æqualium partium (scilicet CD cõtineatur aliquoties in AB, vt nihil supersit): Et ex AB auferatur AE, quæ sit multiplex & æqualium partium eiusdem CD. Dico reliquam EB, eidem CD aut esse æqualem, aut ipsius multiplicem æqualium partium.



Si enim neque sit æqualis, neque multiplex: ponatur EF ipsi CD æqualis: vt reliqua FB sit minor CD, si fieri possit. Et diuidatur AE in Magnitudines ipsi CD æquales. scilicet in AG, & GE. Quoniam igitur AG, GE, & EF sunt ipsi CD æquales, sed FB minor ipsa CD: non diuiditur ergò tota AB in partes ipsi CD æquales. Non est igitur ipsius multiplex æqualium partium, quod est cotrra hypothesin. Addidi æqualium partium, propter id quod diximus initio Definitionum, verbum Multiplicis etiam ad inæqualitatem extendi. Sed inter docendum, ob facilitatem assumuntur ęqualia Multiplicia. Inæqualium enim, nempè Superpartientium & Superparticularium, tædiosa & obscura est diuisio. Sed tamen vtrobiq; ratio eadem.

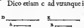
THEOREMA 7, PROPOSITIO VII.

Aequales,ad eandem habent eandem rationem: & eadem ad æquales.

Sint æquales Magnitudines A & B: alia autem quæuis Magnitudo C. Dico vtranque A & B, ad ipsam C eandem habere rationem: Et C, eandem rationem habere ad vtranque.

Sumantur ipsarum A & B æquemultiplices D & E: ipsius verò C, alia vtcunque multiplex F. Quoniam igitur æquemultiplex est D ipsius A vt E ipsius B: æqualis autem est A ipsi B: æqualis igitur, per communem Notionem, erit D ipsi E. Si ergo excedit D ipsam F, excedit & E eandem F: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Est igitur vt A ad C, sic B ad C, per sextam Definitionem huius, Quod est prius.

Dico etiam C ad vtranque ipsarum A & B, eandem habere rationem. Nam iisdem positis, erit, ex communi sententia, æqualis D ipsi E. Si igitur excedit F ipsam D, excedit & ipsam E: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per eandem sextam Definitionem, erit sicut C ad A, ita C ad B, Quod erat demonstrandum.



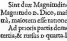
Hoc posterius poterit expeditiùs demonstrari. Nam quum constiterit sicut D ad C, ita E ad C: erit conuerso modo, per Consectarium quartæ huius, sicut C ad A, ita C ad B. Et hoc Theorema ex iis est, quæ inter animi sensa habenda esse videbantur.

THEOREMA 8, PROPOSITIO VIII.

Inęqualium Magnitudinum maior ad eandem, maiorem habet rationem, quàm minor: Et eadem ad minorem, maiorem habet rationem, quàm ad maiorem.

Sint duæ Magnitudines inæquales, A & BC, quarum maior BC: sit autem tertia Magnitudo D. Dico, maiorem esse rationem BC ad D, quam A ad eandem D: Contrà, maiorem esse rationem D ad A, quàm D ad BC.

Ad prioris partis demonstrationem, intelligendæ sunt BC prima, D secunda: A tertia, & rursus D quarta. Deinde primæ & tertiæ æquemultiplicia, itemq́, secundæ & quartæ, sic constituenda: vt multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex verò tertiæ non excedat multiplex quartæ: iuxta sententiam octauæ Definitionis. Quod hac ratione fiet. Quoniam maior est BC quàm A: ponam BE ipsi A æqualem: ac eousque multiplicabo æqualiter vtranque partem EC & EB, vt ex EC proueniat quantitas maior quàm D: quæ sit FG: & ex EB, quantitas non minor quàm eadem D: quæ sit FK. Eritq́, propter æqualem multiplicationem, FK tam multiplex EB, quàm FG multiplex EC: ob idq́, per primam huius, erit tota GK totius BC æquemultiplex vt FK ipsius EC. Ponam insuper H tam multiplicē ipsius A, quàm GK ipsius BC, ac per hoc, quàm FK ipsius EB. Eruntq́, vt FK & H æquales: quū vtriusq; submultiplices positæ sint æquales. Quia igitur FK non est ipsa D minor: neq, H eadem D minor erit. Nunc autē muliplico D, donec proueniat quātitas proximè maior quàm H. Scilicet sumo duplum ipsius D: inde triplum: ac deinceps vno plus, quoad proueniat quātitas M, proximè maior quàm H. Sumo postmodū ipsius D multiplicem quantitatē proximè minorē multiplici M: quæ sit L: vt ipsa M cōstet ex L & D. Eritq́;



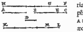
L non

L non minor quàm H: quum M sit proximè maior ipsa H. Quumq; H sit æqualis F K: non erit F K minor L: Neque item F K & D, minores erunt quàm L & D: ac propterea non minores quàm M. Et quia F G est maior D: erit tota G K maior M. Quumq; ad primam B C & tertiam A, sumptæ sint æquemultiplices G K & H: ad secundam vero & quartam (quæ est eadem D) æquemultiplex M sumpta sit, instar duarum: & G K multiplex primæ excedat M multiplex secundæ, neque H multiplex tertiæ excedat eandem M multiplicem quartæ: Erit, per octauam Definitionem huius, maior proportio B C ad D, quàm A ad eandem D, Quod est prius.

Secundum autem demonstratur ex eadem Definitione, conuerso ordine Magnitudinum: vt D sit prima, A secūda: D rursus tertia, & B C quarta. Excedit enim M multiplex primæ, H multiplicem secundæ: neque eadem M multiplex tertiæ, excedit G K multiplicem quartæ. Quare maior est proportio D ad A, quàm D ad B. Sicq; patet tota Propositio.

HANC Campani Demonstrationem, quum paulò esset clarior Demonstratione Theonis, aliquanto etiam clariorem fecimus. Quæ sic tamen obscura est. In quo mirari subit, quum huius Quinti Libri Propositiones in communi intelligentia positæ sint, sicut anteà monuimus, ac prima specie quendam veluti consensum in animis pariant: quòd tam implicatè demonstrentur. Huic igitur loco rursus compendium simul & lucem attulimus.

Sint duæ Magnitudines A & B C, quarum maior B C: sitq; tertia quantacunque Magnitudo D. Dico maiorem esse rationem B C ad D, quàm A ad D.



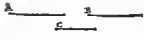
Intelligantur vt priùs, B C prima, D secunda, A tertia, & rursus D quarta. Earumq; parentur æquemultiplicia ad hunc modum. Quoniam maior est B C, quàm A: pono E B ipsi A æqualem: Et vtranque E C & E B æqualiter sic multiplico, vt ex E C proueniat quantitas maior quàm D: quæ sit F G: & ex E B, quantitas non minor quàm eadem D: quæ sit G H. Eritq;, propter æqualem multiplicationem, G F æquemultiplex ipsius E C vt G H ipsius E B: ob idq;, per primam huius, tam multiplex est G H ipsius E B, sicq; ipsius A, quàm tota F H totius B C. Habeo itaque F H æquemultiplicem ipsius B C primæ, & G H ipsius A tertiæ. Nunc autem multiplico D donec exurgat quantitas proximè maior quàm G H: scilicet sumo ipsius D duplum, indè triplum: ac continenter vno plus. Et produco K L, quæ sit prima multiplex, maior ipsa G H. Et ex K L, reseco L M simplum & æquale ipsi D. Est igitur K L ipsius D vtcunque multiplex, instar duarum, quatenus est D secunda & quarta. Et quoniam K L est proximè maior ipsa G H: non erit eadem G H minor K M. Et quia F G est maior D, & L M eidem D æqualis: excedet F H multiplex primæ, ipsam K L multiplicem secundæ. Sed quum K L posita sit maior quàm G H: non excedet ipsa G H multiplex tertiæ, K L multiplicem quartæ. Quare, per octauam Definitionem huius, maior est ratio B C ad D, quàm A ad D, Quæ est prior pars Theorematis.

Altera autem modò probata est: scilicet ex eadem Definitione, conuerso ordine Magnitudinum & Multiplicium.

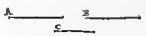
THEOREMA 9, PROPOSITIO IX.

Quæ ad eandem habent eandem rationem, Magnitudines, inter se sunt æquales: Et ad quas eadem habet eandem rationem, eæ quoque sunt æquales.

Sit duarum Magnitudinum A & B eadem ratio ad C Magnitudinē. Dico A & B esse æquales. E conuerso, si eadem sit ratio C ad vtranque earum: dico & sic ipsas esse æquales. Conuersa septimæ huius.



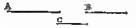
Prior pars sic probatur. Si enim non sunt æquales: erit altera ipsarum, vt A, maior. Et erit, per priorem partem antecedentis, maior ratio A ad C, quàm B ad C, cõtra hypothesin. Secunda verò sic. Si A est maior B: erit, per secundam partem antecedentis, maior ratio C ad B, quàm C ad A, contra hypothesin.



THEOREMA 10, PROPOSITIO X.

Quæ duarum Magnitudinum ad eandem maiorem rationem habet, hæc maior est. Ad quam autem duarũ, eadem maiorem rationem habet, hæc minor est.

Si fuerit ratio maior A ad C, quàm B ad D: dico A esse maiorem B. Si verò fuerit ratio maior C ad B, quàm C ad A: dico econtrariò B maiorem esse quàm A. Conuersa octauæ.

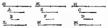


Prior pars cõstat ex priori parte septimæ & priori octauæ. Nam per priorem septimæ, non erit A æqualis B: Et per priorem octauæ, non erit minor. Secũda verò patet ex secundis partibus earundem.

THEOREMA 11, PROPOSITIO XI.

Quæ eidem sunt æquales rationes, & inter se sunt æquales.

Sit ratio A ad B & ratio C ad D, vtraque æqualis rationi quæ est E ad F. Dico duas rationes A ad B & C ad D esse æquales: esse scilicet sicut A ad B, ita C ad D.



Sumantur G ad A, & H ad C, & K ad E æquemultiplices: itemq́, L ad B, & M ad D, & N ad F, aliæ vtcunque æquemultiplices. Et quia ponitur E ad F sicut A ad, B & sicut C ad D: erit, per conuersam sextæ Definitionis bis sumptam, si K excedat N, vt G excedat L, & H excedat M: & si æquale, æquale: & si minus, minus. Si igitur G excedat N, excedet H ipsum M: & si æquale, æquale: & si minus, minus. Quare per sextam Definitionem, erit vt A ad B, ita C ad D, Quod erat probandum.

In hac demonstratur idem, vt dicitur, per idem. Tam enim confessa est simplicium comparatio, quàm excessus & æqualitas Æquemultiplicium: quanuis aliter probari posse non negem. Sed quorsùm? quum sit animi sensum, ac sub eo Principio audiatur, Quæ eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia? Quod certè ita generale est & vniuersum: vt in omni arte, in omni specie, in omni denique ingenij exercitatione, assensionem & probationem præ se ferat. Sed tamen huiusce rei defensionem iam antè occupauimus in prima huius.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XII.

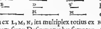
Campano 13.

Si singulæ Magnitudines ad singulas eandem habeant rationem: erunt, sicut vna antecedentium ad vnam consequentium, sic omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Quod prima proposuit de Multiplicibus, hæc in vniuersum de quibuscunq; Magnitudinibus.

Sint Magnitudines singulæ A, C, E, ad singulas B, D, F, eandem rationem habentes:

tes: nempè ſicut A ad B, ita C ad D & E ad F. Dico eſſe ſicut A ad B, ita omnium ſimul A C E, ad omnes ſimul B D F.



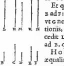
Sumantur ipſarum A, C, B, æquemultiplicia G, H, K: & ipſarum B, D, F, alia vtcunq; æquemultiplicia L, M, N. Eritq;, per primã huius, totũ ex G, H, K, ita multiplex totius ex A, C, E, vt G eſt multiplex A: itidemq́, totum ex L, M, N, ita multiplex totius ex B, D, F, vt L eſt multiplex B. Et per conuerſionem ſextæ Definitionis bis ſumptam, ſi G excedit L, & H excedet M, & K excedet N: & ſi æquale, æquale: & ſi minus, minus. Itaque, per communem Notionem, ſi G excedit L: excedit & totum ex G, H, K, totum ex L, M, N: & ſi æquale, æquale: & ſi minus, minus. Quare, per eandem Definitionem, erit ſicut A ad B, ita totum ex A, C, E, ad totum ex B, D, F, Quod erat probandum.

THEOREMA 13, PROPOSITIO XIII.

Campano 12.

Si primæ ad ſecundam eadem fuerit ratio quæ tertiæ ad quartam: tertiæ verò ad quartam maior fuerit ratio, quàm quintæ ad ſextam: primæ quoque ad ſecundam maior erit ratio, quàm quintæ ad ſextam.

Sit eadem ratio A ad B quæ C ad D: maior autem C ad D, quàm E ad F. Dico maiorem quoque eſſe rationem A ad B, quàm E ad F.



Sumam G ad A, & H ad C æquemultiplicia: Itemq́, L ad B, & M ad D, & N ad F, alia æquemultiplicia.

Et quia eadem eſt ratio C ad D quæ eſt A ad B, ſed maior quàm E ad F: erit, per conuerſionem ſextæ Definitionis, ſi H excedit M, vt G neceſſariò excedat L. At, per conuerſionem octauæ Definitionis, ſi H excedit M, non neceſſariò K excedet N. Si igitur G excedit L, non neceſſariò K excedet N. Quare maior eſt ratio A ad B, quàm E ad F, Quod fuit probandum.

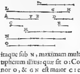
Hoc autem totum nil aliud eſt, quàm Si fuerint duo inter ſe æqualia, vnum verò illorum tertio quopiam maius: erit & reliquum tertio maius.

Ex Campano. Quòd ſi ſit eadem ratio A ad B quæ C ad D, ſed C ad D maior quàm E ad F: erit & A ad B maior quàm E ad F. Nam ſi ſit C ad D minor quàm E ad F: erit E ad F maior quàm C ad D. Per conuerſionem igitur maioris Improportionalitatis, ſi K excedit N, non neceſſariò H excedet M. Sed ſi H non excedit M, neque G excedet L. Per Definitionem igitur maioris Improportionalitatis, maior erit proportio E ad F, quàm A ad B. Itaque econuerſo, minor erit A ad B, quam E F, Quod erat oſtendendum. Sed hoc non admodum exquiſitæ probationis. Quod autem ſequitur maioris eſt momenti,

Si fuerit primæ quatuor Quantitatum, ad ſecundam maior ratio, quàm tertiæ ad quartam: aliqua erunt æquemultiplicia primæ & tertiæ, quæ quum comparabũtur ad aliqua æquemultiplicia ſecundæ & quartæ, inuenietur multiplex primæ maius eſſe multiplici ſecundæ: non autem multiplex tertiæ, multiplici quartæ. Quod ſic probatur.

Sit maior proportio AB ad C, quàm D ad E. Ponaturq́ue proportio AF ad C ſicut D ad E. Et erit, per hanc & decimam, AF minor AB. Et ſit minor in quantitate FB. Hanc FB multiplicabo, donec proueniat quantitas maior G: quæ ſit

G H: hac lege, ut D toties multiplicata, producat quãtitatem non minorem E: quæ sit K. Tunc faciam vt L G sit tam multiplex A F, quàm G H est multiplex ipsius F B, aut K ipsius D. Eritq́, per primam huius, L H ita multiplex ipsius A B ut K ipsius D. Ponam postmodùm M primam quantitatem multiplicem E, quæ sit maior K: & ponam N ita multiplicem C, vt M est multiplex E. Eritq́, ex positionibus, & ex conuersione sextæ Definitionis, quantitas N prima multiplicium C, quæ erit maior L G: nec erit L G minor C. Sumam itaque sub N, maximam multiplicium C: aut ipsi æqualem, si fortè N sit prima multiplicium illius: quæ sit O: Constabitq́, N, ex O & C. Quia ergo L G non est minor O, & G N est maior C: erit L H maior N. Quare quum K sit minor M, patet propositio.

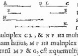


Hæc Campanus. Cuius breuitatem ferè vbique laudaui. Hîc verò ob compendium, manca apparet Demonstratio. Non enim satis explicat, quantitatem N esse primam multiplicium quæ sit maior L G. Hoc igitur probandum fuit ex quarta huius. Quum enim sit sicut D ad E, ita A F ad C: sitq́, K ipsius D æquemultiplex vt G L ipsius A F: itemq́, M ipsius E vt N ipsius C: erit, per quartam huius, sicut K ad M, ita G L ad N. Sed K ad M proximè minor est ipsa M. Et G L igitur proximè minor est ipsa N.

Quod autem dicit, ex positionibus, hoc innuit: quòd quum G L sit eodem modo multiplex ipsius A F, quo & K ipsius D: sitq́, D ad E sicut L G ad A F: erit L G maior C, quum K maior quàm E posita sit.

RVRSVS Campanus. Conuersam quoque huius demonstrare poterimus. Videlicet, si reperiantur aliqua æquemultiplicia primæ & tertiæ: itemq́, alia secundæ & quartæ æquemultiplicia: & multiplex primæ superet multiplex secundæ, neque multiplex tertiæ superet multiplex quartæ: maior erit proportio primæ ad secundam, quàm tertiæ ad quartam. Quod sic demonstratur.

Sint quatuor Quantitates, A prima, B secunda: C D tertia, & E quarta: sintq́, F ad A & G ad C D æquemultiplicicia: similiter H ad B & K ad E, æquemultiplicia: & F superet H, neque G superet K. Dico maiorem esse rationem A ad B, quàm C D ad E.



Si enim fuerit æqualis: fiet vt G superet K, per conuersionem sextæ Definitionis: quod est contra hypothesin. Si autem minor: ponatur C L ad E sicut A ad B. Eritq́ per huius decimam, C L minor C D. Et sit minor in quantitate L D. Ponam igitur vt M N sit ita multiplex C L, & N P ita multiplex L D, sicut F est multiplex A. Eritq́;, per primam huius, M P ita multiplex C D vt F est multiplex A. Vtraq, igitur duarum Quantitatũ M P & G, est æquemultiplex Quantitatis C D: quapropter ipsæ inter se æquales, per ea quæ demonstrata sunt in septima huius. Et quia G non est maior K, non erit M P maior eadem. Sed per conuersionem sextæ Definitionis, M N est maior K: quum F sit maior H. Maior igitur M N, ipsa M P, Quod fieri non potest. Quare constat propositio. Hæc ille. Sed ne hæc quidem Demonstratio quicquam habet egregium. Probat enim quod probatione non indiget, immò quod iam sæpe in probationem assumpsimus superiorum Theorematum. Prior tamen non contemnenda: quòd ostendat rationem sic constituendorum Æquemultiplicium, vt multiplex primæ superet multiplex secundæ, sed multiplex tertiæ non superet multiplex quartæ.

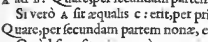
THEOREMA 14, PROPOSITIO XIIII.

Si primæ ad secundam eadem fuerit ratio quæ tertiæ ad

quartam,

quartam, prima verò maior fuerit, quàm tertia: erit & secunda maior, quàm quarta: Et si æqualis, æqualis: & si minor, minor.

Sit ratio A primæ, ad B secundam: vt C tertiæ, ad B quartam: & sit maior A, quàm C. Dico & B maiorem esse quàm D: & si æqualis, æqualem: & si minor, minorem.



Quum enim A sit maior quàm C: erit, per priorem partem octauæ huius, maior ratio A ad D, quàm C ad D: ob idq́;, maior A ad D, quàm A ad B. Quare, per secundam partem decimæ huius, erit B maior quàm D.

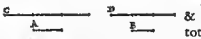
Si verò A sit æqualis C: erit, per priorem partem septimæ, A ad D sicut C ad D. Quare, per secundam partem nonæ, erit B æqualis D.

Quòd si A sit minor quàm C, erit per priorem partem octauæ, minor ratio A ad D, quàm C ad D: ob id, maior A ad B, quàm ad D. Quare, per secundam partem decimæ, erit B minor quàm D. Ac sic patet Propositio.

THEOREMA 15, PROPOSITIO XV.

Magnitudines inter se, eandem habent rationem quam earum Aequemultiplicia inter se.

Sint C ad A, & D ad B æquemultiplicia. Dico eandem esse rationem C ad D quæ est A ad B.

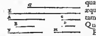


Diuidatur C secundùm quantitatem ipsius A: & D secundùm quantitatem ipsius B. Eruntq́; tot partes in C, æquales ipsi A: quot in D, ipsi B. Et quia quælibet pars ipsius C, ad quanlibet partem ipsius D, est sicut A ad B: erit, per duodecimam huius, C ad D sicut A ad B, Quod erat ostendendum.

THEOREMA 16, PROPOSITIO XVI.

Si quatuor Magnitudines proportionales fuerint, permutatim quoque proportionales erunt.

Sit proportio A ad B sicut C ad D. Dico permutatim, esse A ad C sicut B ad D. Ponam E ad A, & F ad B æquemultiplices: itemq́, G ad C, & H ad D æquemultiplices. Et erit, per antecedentem, E ad F sicut G ad H. Itaque, per decimam



quartam, si E est maior G: erit & F maior H: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem huius, erit A ad C sicut B ad D, Quod erat ostendendum.

Ex hoc manifestum est, vt ex Continua proportionalitate fiat Permutata, oportere quatuor Magnitudines esse eiusdem generis.

THEOREMA 17, PROPOSITIO XVII.

Si fuerint Magnitudines coniunctim proportionales, disiunctim quoque proportionales erunt.



Sit proportio AB ad BC sicut DE ad EF. Dico esse AC ad CB sicut DF ad FE.

Ponam GH ad AC & HK ad CB: item LM ad DF & MN ad FE, singulas singularum æquemultiplices: Ac rursus ipsarum

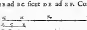


rum CB & FE, alias vtcunque æquemultiplices KP & NQ. Et erit, per primam huius, GK ita multiplex AB vt GH est multiplex AC: & LN ita multiplex DE vt LM est multiplex DF. Sed quàm multiplex est GH ipsius AC, tam multiplex posita est LM ipsius DF: & continuè, quàm multiplex LM ipsius DF, tam multiplex est, per primam huius, LN ipsius DE. Quàm multiplex igitur GK ipsius AB, tam multiplex est, per vndecimam huius, LN ipsius DE. Et quoniam HK & MN sunt ipsarum CB & FE æquemultiplices: item KP & NQ, aliæ earundem æquemultiplices: erunt, per secundam huius, KP & MQ, earundem CB & FE æquemultiplices. Per conuersionem igitur sextæ Definitionis, si GK multiplex AB, excedat HP multiplicem CB: excedet LN multiplex DE, ipsam MQ multiplicem FE: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Ablatis itaque communibus HK & MN, si GH excedit KP, excedet & LM, per animi Notionem, MQ: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem, erit sicut AC ad CB, ita DF ad FE, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 18, PROPOSITIO XVIII.

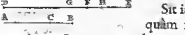
Si fuerint Magnitudines disiunctim proportionales, coniunctim quoque proportionales erunt.

Manente eodem Magnitudinum positu, sit AC ad CB sicut DF ad FE. Dico esse AB ad BC sicut DE ad EF. Conuersa antecedentis.



Singulis enim Æquemultiplicibus ad singulas Magnitudines accommodatis: erit, per conuersionē sextæ Definitionis, si GH excedit KP, vt LM excedat NQ: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quapropter positis communibus HK & MN: erit, per communem Notionem, si GK excedit HP, vt LN excedat MQ: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem, erit AB ad BC sicut DE ad EF, Quod erat demonstrandum.

ALITER, si placet, ab impossibili. Quum sit AC ad CB sicut DF ad FE: sed non AB ad BC sicut DE ad EF: sit DF ad aliquam aliam, vt ad EG, Magnitudinem, sicut est AB ad BC. Atque ea erit maior ipsa EF, aut minor: Nam si æqualis ponatur, erit confessa propositio. Sit itaque primùm EG maior quàm EF. Et erit, per antecedentem, AC ad CB sicut DG ad EG. Itaque, per vndecimam huius, erit DG ad EG sicut DF ad FE. Quare, per decimamquartam eiusdem, quum DG prima, sit minor DF tertia: erit GE secunda, minor EF quarta. Sed GE posita fuit maior. Quare euertitur positio.



Sit iam sicut AB ad BC, ita DE ad EH, minorem quàm EF. Et erit, per antecedentem, AC ad CB sicut DH ad HE. Itaque, per vndecimam, DH ad HE sicut DF ad FE. Et quia DH prima, est maior DF tertia: erit, per decimamquartam, EH secunda, maior EF quarta, Quod fieri non potest. Quare sicut AB ad BC, ita DE ad EF, Quod erat demonstrandum.

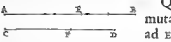
THEOREMA 19, PROPOSITIO XIX.

Si fuerit vt totum ad totum, sic ablatum ad ablatum: erit & reliquum ad reliquum sicut totum ad totum.

Quod quinta proposuit de Multiplicibus, hæc de Magnitudinibus in vniuersum.

Sit

Sit itaque vt totum AB ad totum CD, ita ablatum BE ad ablatum DF. Dico esse & reliquum AE ad reliquum CF, vt totum AB ad totum CD.



Quum enim sit AB ad CD sicut BE ad DF: erit permutatim, AB ad B sicut CD ad DF: & disiunctim, AB ad EB sicut CF ad FD: & iterum permutatim, AE ad CF sicut EB ad FD. Et quia sic erat AB ad CD, constat propositio.

APPENDIX ex Campano. Ex hac & Permutata proportionalitate demonstratur Proportionalitas Euersa. Vt si sit AB ad BE sicut CD ad DF: Dico esse BA ad AE sicut DC ad CF.

Nam quum sit AB ad BE sicut CD ad DF: erit permutatim, AB ad CD sicut BE ad DF. Ob id, per hanc decimamnonam, BA ad DC sicut AE ad CF. Quare permutatim, BA ad AE sicut DC ad CF, Quod erat ostendendum.

CONVERSA quoque Proportionalitas potest demonstrari indirectè, ex Permutata Proportionalitate & nona huius.



Vt si sit proportio A ad B sicut C ad D. Dico esse B ad A sicut D ad C.

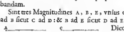
Sin minus: Sit D ad E sicut B ad A. Et quia A ad B est sicut C ad D: erit permutatim A ad C sicut B ad D. Et quia iterum B ad A sicut D ad E: erit quoque permutatim, B ad D sicut A ad E. Quare A ad E sicut A ad C. Si igitur E non sit æquale C: fiet contrà secundam partem nonæ. Si autem æqualis: erit B ad A sicut D ad C, Quod fuit ostendendum. Hæc Campanus. Hoc autem postremùm probatum fuerat suprà ad quartam huius.

THEOREMA 20, PROPOSITIO XX.

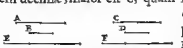
Si fuerint tres Magnitudines vnius ordinis, & aliæ totidem alterius, fuerintq; duæ vnius in eadem ratione cum duabus alterius eodem situ positis, prima autem vnius fuerit maior tertia: erit & prima alterius maior tertia: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor.

Hoc Theorema cum sequenti, proponitur ad Æquam proportionalitatem probandam.

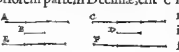
Sint tres Magnitudines A, B, E, vnius ordinis: tresq; C, D, F, alterius: sitq; A ad B sicut C ad D: & B ad E sicut D ad E.



Dico si A est maior E, esse & C maiorem F: & si æqualis, equalem: & si minor, minorem. Si enim est maior: erit, per priorem partem octauæ huius, maior ratio A ad B, quàm E ad B: ob id, per duodecimam, maior erit C ad D, quàm E ad B. Et quia, per Conuersam proportionalitatem, E ad B est sicut F ad D: erit C ad D maior quàm F ad D. Quare, per priorem partem decimæ, maior est C, quàm F. Quòd si A sit minor quàm E: probabitur iisdem argumentis C minor quàm F. Erit enim



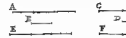
per priorem partem octauæ, minor ratio A ad B, quàm E ad B: ob idq;, per duodecimam, & per Conuersam proportionalitatem, minor erit C ad D, quàm F ad D. Quare, per priorem partem Decimæ, erit C minor F. Si autem A sit æqualis E, erit per priorem partem septimæ, A ad B sicut E ad B: ob



idq;, per secundam partem vndecimæ, & Conuersam proportionalitatem, erit C ad D sicut F ad D. Quare,

Quare, per priorem partem nonæ, erit C æqualis F, Quod erat demonstrandum.

Hic subijcit Campanus. Hanc Propositionem demonstrauerunt quidam ex Permutata proportionalitate, ad hunc modum. Est A ad B sicut C ad D: ergò permutatim A ad C sicut B ad D. Et rursùs quia B ad E sicut D ad F: erit permutatim B ad C sicut E ad F. Sed erat B ad D sicut A ad C. Ergò, per vndecimam,

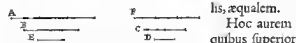


erit A ad C sicut E ad F. Quare, per decimamquartam, si A prima, est maior E tertia: erit & C secunda, maior F quarta: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Sed sic non rectè demonstrant. Nam si à Permutata proportionalitate argumentationem, vt cœperunt, perficiant: ij tandem Æquam proportionalitatem concludent: scilicet A ad C sicut E ad F: ergò permutatim A ad E sicut C ad F, Quæ est Æqua proportionalitas. Quòd si Euclides sic concludi posse vidisset: frustrà hoc præmisisset Theorema: sed Æquam proportionalitatem statim astruxisset. Quum itaque hæc ratiocinatio non procedat, nisi vtriusque ordinis Magnitudines sint eiusdem generis: minus conuenienter ad singulare contrahunt quod Euclides generatim proposuit.

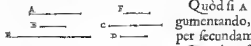
THEOREMA 21, PROPOSITIO XXI.

Si fuerint tres Magnitudines vnius ordinis, totidemq; Magnitudines alterius, fueritq; earum Perturbata ratio, prima verò vnius ordinis, fuerit maior tertia: erit quoque prima alterius, maior tertia.

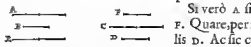
Sint tres Magnitudines A, B, E, vnius ordinis: tresq; aliæ F, C, D, alterius: & sit proportio inter eas Perturbata: scilicet A ad B sicut C ad D, & B ad E sicut F ad C. Dico si A est maior E: esse & F maiorem D: & si minor, minorem: & si æqualis, æqualem.



Hoc autem probatur ijsdem argumentis quibus superior. Si enim A sit maior E, erit maior ratio A ad B, quàm E ad B: atque ob id, maior C ad D, quàm E ad B: quapropter & maior quàm C ad F: quia vt E ad B, sic C ad F, per Conuersam proportionalitatem. Quare, per secundam partem decimæ, maior est F quàm D.



Quòd si A minor sit quàm E: erit, gradatim argumentando, minor C ad D, quàm ad F. Quare, per secundam partem eiusdem, erit F minor D.



Si verò A sit æqualis E, erit C ad D sicut C ad F. Quare, per secundam partem nonæ, erit F æqualis D. Ac sic constat Propositio.

HÆC itaque cum antecedente, quia ad probationem Æquæ proportionalitatis spectat: Æquemultiplicium rationem vtraque præcipuè considerat. Atque hunc sensum habent, vt non possit prima vnius ordinis maior esse tertia, quin prima alterius sit quoque maior tertia: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Breuiter, hæc verba excessus & æqualitatis omninò sic accipienda, vt in Desfinitione sexta huius. Atq; hoc ad duarum sequentium intelligentiã monere commodum fuit.

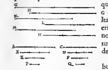
THEOREMA 22, PROPOSITIO XXII.

Si fuerint tres Magnitudines vnius ordinis, totidemq; alterius, fuerintq; binæ vnius ordinis in eadem ratione cum binis alterius similiter sumptis: eæ & ex æquali proportionales erunt.

Sint

Sint tres Magnitudines A, B, E, vnius ordinis: aliæq; totidem alterius, C, D, F: sitq; A ad B sicut C ad D, & B ad E sicut D ad F. Dico esse A ad E sicut C ad F.

Ponam G ad A, & H ad C æquemultiplicia: itemq; K ad B, & L ad D, alia æquemultiplicia. Rursus M ad E, & N ad F, alia æquemultiplicia. Et erit per quartam: aut, si mauis, per decimamquartã huius, G ad K sicut H ad L: & K ad M sicut L ad N. Itaque, per vigesimam eiusdem, si G est maior M, erit H maior N: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem huius, erit A ad E sicut C ad F, Quod fuit ostendendum.

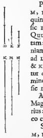


IAM verò si fuerint Magnitudines plures tribus in vtroque ordine: erit omninò prima ad vltimam vnius, vt prima ad vltimam alterius: scilicet in Æqua proportionalitate. Vt, si addantur P & Q: & sit E ad P sicut F ad Q: Dico esse A ad P sicut C ad Q. Erit enim A ad E sicut C ad F, vt modò demonstrauimus. Sepositis igitur B & D, erunt tres Magnitudines A, E, P, vnius ordinis, tresq; alterius C, F, Q, eiusdem conditionis cum prioribus. Quare A ad P sicut C ad Q, Quod erat ostendendum.

THEOREMA 23, PROPOSITIO XXIII.

Si fuerint tres Magnitudines vnius ordinis, totidemq; alterius, fueritq; perturbata inter ipsas ratio: eæ & ex æquali proportionales erunt.

Sint tres Magnitudines vnius ordinis A, B, C: atque aliæ totidem alterius D, E, F. Sitq; A ad B sicut E ad F: & B ad C sicut D ad E. Dico esse A ad C sicut D ad F.



Ponam G, H, K, ad A, B, D, æquemultiplicia: aliaq; L, M, N, ad C, E, F, æquemultiplicia. Et erit, per decimamquintam huius, vt A ad B, sic G ad H. Et quoniam vt A ad B, sic E ad F: erit, per vndecimam, vt G ad H, sic E ad F. Quumq; sit vt E ad F, sic M ad N, per ipsam decimamquintam: erit & per vndecimam, vt G ad H, sic M ad N. Et quoniam vt B ad C, sic D ad E: erit per quartam huiusce, vt H ad L, sic K ad M. Sunt itaque G, H, L tres Magnitudines, & K, M, N aliæ totidem, perturbatim proportionales. Si igitur G excedit L, & K excedet N: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem, erit vt A ad B, sic D ad F, Quod erat ostendendum.

ALITER possunt sumi Æquemultiplicia. Sint enim tres Magnitudines vnius ordinis A, B, E, totidemq; F, C, D, alterius: & sit vt A ad B, sic C ad D: & vt B ad E, sic F ad C. Dico esse A ad E sicut F ad D.

Sumam G, H, K ad A, C, F, æquemultiplicia: aliaq; L, M, N ad B, E, D, æquemultiplicia. Et erit, per quartam huius, G ad L sicut H ad N: &, per decimamquintam, L ad M sicut K ad H. Erunt itaque, vt priùs, Æquemultiplicia vtriusque ordinis, in ratione perturbata inter se. Ob id, per vigesimamprimam, si G excedat M, & K excedet N: & si æqualis, æqualis: & si minor, minor. Quare, per sextam Definitionem, erit vt A ad E, sic F ad D, Quod erat probandum.



Quod si plures tribus fuerint Magnitudines in vtroque ordine: verbi causa, quatuor: sitq; A ad B sicut D ad Q: & B ad E sicut C ad D: & E ad F sicut F ad C: erit & in æqua proportionalitate, A ad F sicut F ad Q. Nam quum probatum sit A ad E sicut C ad Q: sublatis B & D, erunt tres quantitates, A, E, F, aliæq; totidem F, C, Q, in Perturbata ratione inter se. Quare A ad F sicut F ad Q. Quod erat demonstrandum.

A C quemadmodum ex Ternarij demonstratione probatur Quaternarius, seposito vno mediorum: ita ex Quaternario Quinarius, duobus sepositis medijs: & ex Quinario Senarius, tribus semotis medijs. Ac sic continenter. Quod & in superiori specie Æquæ proportionalitatis intelligendum Quamobrem, quum Ternarius totam probationem absoluat, disertè Euclides de tribus tantùm Magnitudinibus proposuit.

THEOREMA 24, PROPOSITIO XXIIII.

Si fuerit primum ad secundum, vt tertium ad quartum: & item quintum ad secundum, vt sextum ad quartum: erit & compositum ex primo & quinto ad secundum, vt compositũ ex tertio & sexto ad quartum.

Quod secunda proposuit de Multiplicibus, hæc generatim de Magnitudinibus proponit.

Sit itaque AB ad C vt DE ad F: itemq; BG ad C vt EH ad F. Dico esse AG ad C sicut DH ad F.

Erit enim, per Conuersam proportionalitatem, C ad BG vt F ad EH: quapropter ex vigesimasecunda: erit in Æqua ratione AB ad BG vt ED ad EH: sumptis scilicet AB prima, C secunda, & BG tertia, vnius ordinis: atque DE prima, F secunda, & EH tertia, alterius. Igitur,



per decimamoctauam, AG ad GB vt DH ad HE. Quare quum sit posita BG ad C vt EH ad F: sumptis AG prima, BG secunda, & C tertia, vnius ordinis: atque DH prima, EH secunda, & F tertia, alterius: erit per vigesimamsecundam, in Æqua ratione, AG ad C vt DH ad F, Quod erat ostendendum.

THEOREMA 25, PROPOSITIO XXV.

Si quatuor Magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

Sint quatuor Magnitudines proportionales: AB, CD, E, & F: vt AB ad CD, sic E ad F: sitq; earum maxima AB, minima verò F. Dico ambas AB & F, maiores esse ambabus CD & E.



Ponam AG æqualem ipsi E: & CH æqualem ipsi F. Et quoniam sicut tota AB ad totam CD, sic ablata AG ad ablatam CH erit & reliqua GB, per decimamnonam huius, ad reliquam HD, sicut tota AB ad totam CD. Maior autem est AB ipsa CD. Et maior igitur GB ipsa HD. Et quoniam æqualis est AG ipsi E, & CH ipsi F: erũt AG & F æquales ipsis CH & E. Addita ergo GB maiori ad duas AG & F: & HD minori ad duas CH & E: fient, per communem sententiam, AB & F, maiores quàm CD & E, Quod erat demonstrandum.

HACT

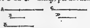
HACTENVS Euclides huius Quinti Proportiones tradidit. Nouem autem sequentes Propositiones à Campano additæ sunt, ex alieno quopiam exemplari. sicut & sæpè aliâs ordinem Euclidis deserit, pauca prætermittit, nonnulla substituit, aliaq́; addit de suo. Neque infelici opera. Pleraque enim in demonstrando facit meliora & clariora, compendij officio: licet in quibusdam dormitet. Vt vt est, Campani constructionem retinuit incitando Euclide, Ioannes Regiomontanus nostræ ætatis Mathematicus clarissimus. Quin & sequentes Propositiones ab eo citatas inuenimus, in ea quam in Ptolemæum reliquit Epitome. Quæ res effecit vt illas apponeremus: alioqui libenter prætermissuri. Nam præter id quòd probationes quas ex ijs venatur Regiomontanus, abundè ex Euclide constant: etiam in hac Proportionum materia mihi videntur Propositiones resecandæ potius quàm in longiùs ducendæ. Nam quæ per se claræ sunt, locum tantùm occupant: ingenium etiam onerant. Tædium enim multitudo vbique parit. Eæ itaque sic habent.

Prima Additarum.

Si fuerit quatuor Quantitatum proportio primæ ad secundam, maior quàm tertiæ ad quartam: erit conuersim econtrariò, secundæ ad primam, minor quàm quartæ ad tertiam.

Sit proportio A ad B maior quàm C ad D. Dico conuersim econtrariò, minorem esse proportionem B ad A, quàm D ad C.

Si enim est eadem B ad A, quæ est D ad C: erit econuersò A ad B vt C ad D, contra hypothesin. Si verò maior est B ad A, quàm D ad C: ponatur E ad A vt D ad C. Eritq́;, per duodecimam, E ad A minor quàm B ad A. Quapropter



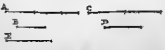
ex priori parte decimæ, erit E minor B: ob idq́;, ex secunda parte octauæ, maior erit proportio A ad E, quàm A ad B. Et quia, per Conuersam proportionalitatem, est A ad E sicut C ad D: erit, per duodecimam, proportio C ad D maior quàm A ad B. Sed erat minor. Ex repugnantia igitur, astruitur propositio.

Possumus & affirmatè demonstrare. Ponatur E ad B vt C ad D. Et erit econuersò B ad E vt D ad C. Et quia maior est A quàm E, per priorem partem decimæ: erit, ex secunda parte octauæ, B ad A minor quàm B ad E. Quare, per duodecimam, B ad A minor quàm D ad C, Quod erat probandum.

I I.

Si quatuor Quantitatum fuerit maior proportio primæ ad secundam, quàm tertiæ ad quartam: erit permutatim, maior proportio primæ ad tertiam, quàm secundæ ad quartam.

Sit maior proportio A ad B, quàm C ad D. Dico permutatim, maiorem esse A ad C, quàm B ad D.



Eadem enim non erit: quia tunc quoque esset permutatim, A ad B sicut C ad D. Quòd si sit minor: ponatur E ad C vt B ad D. Eritq́, ex duodecima, E ad C maior quàm A ad C. Itaque, ex priori parte decimæ, erit E maior quàm A. Quapropter, ex priori parte octauæ, E ad B maior quàm A ad B. Et quia posita est E ad C sicut B ad D: erit permu-

 tatim,

tatim, E ad B ficut C ad D. Quare ex duodecima, maior erit proportio C ad D, quàm A ad B, Quod eſt contra hypotheſin.



Idem per affirmationem. Sumatur E ad B vt C ad D. Eritq́, ex priori parte decimæ, E minor A: propterea quod, ex priori parte octauæ, maior eſt A ad C, quàm E ad C. Sed ex Permutata proportionalitate, eſt E ad C vt B ad D. Quare, per duodecimam, A ad C maior quàm B ad D, Quod erat oſtendendum.

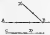
III.

Si fuerint quatuor Quantitates, quarum primæ ad ſecundam ſit maior proportio, quàm tertiæ ad quartam: erit quoque coniunctim, maior proportio primæ & ſecundæ ad ſecundam, quàm tertiæ & quartæ ad quartam.

Sit maior proportio A ad B, quàm C ad D. Dico & maiorem eſſe proportionem totius AB ad B, quàm totius CD ad D.

Neque enim erit eadem: quia ſic quoque diſiunctim eſſet A ad B vt C ad D.

Quod ſi ſit minor: ſit EB ad B vt CD ad D. Eritq́, ex duodecima huius, EB ad B maior quàm AB ad B. Itaque, ex priori parte decimæ, maior eſt ipſa EB quàm tota AB. Et per communem Notionem, E maior quàm A. Quapropter, ex



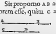
priori parte octauæ, maior eſt proportio E ad B, quàm A ad B. Sed E ad B eſt vt C ad D, per Diſiunctam proportionalitatem: erat enim EB ad B vt CD ad D. Quare, per duodecimam, C ad D maior eſt, quàm A ad B, Quod eſt contra hypotheſin.

Idem affirmatè. Quum poſita ſit maior proportio A ad B, quàm C ad D: ponatur E ad B vt C ad D. Eritq́, ex priori parte decimæ, E minor A. Ob id, per animi Notionem, EB erit minor quàm AB. Itaque, ex priori parte octauæ, maior erit proportio AB ad A, quàm EB ad B. At proportio EB ad B, per Coniunctam proportionalitatem, eſt ſicut CD ad D. Poſita enim eſt E ad B vt C ad D. Quare, per duodecimam, maior eſt AB ad B, quàm CD ad D, Quod erat oſtendendum.

IIII.

Si fuerint quatuor Quantitates: quarum primæ & ſecundæ ad ſecundam ſit maior proportio, quàm tertiæ & quartæ ad quartam: erit quoque diſiunctim proportio primæ ad ſecundam maior quàm tertiæ ad quartam.

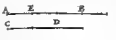
Sit proportio AB ad B maior quàm CD ad D. Dico & diſiunctim, A ad B maiorem eſſe, quàm C ad D.



Æqualis quippe non erit. Nam, per Coniunctam proportionalitatem, eſſet AB ad B vt CD ad D. Si verò minor eſſe poſſit, vt ſit maior C ad D, quàm A ad B: erit, per antecedentem, maior CD ad D, quàm AB ad B. Quod minimè conuenit: quum poſita ſit minor.

Idem

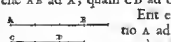
Idem affirmatè. Ponatur E B ad B vt C D ad D. Eritq., ex priori parte decimæ, E B minor quàm A B: ob id, per animi Notionem, E est minor quàm A. Quare, ex priori parte octauæ, proportio E ad B minor est quàm A ad B, Quod erat ostendendum.



V.

Si fuerint quatuor Quantitates, quarum primæ & secundæ ad secundam maior sit proportio, quàm tertiæ & quartæ ad quartam: erit euersim, minor proportio primæ & secundæ ad primam, quàm tertiæ & quartæ ad tertiam.

Sit maior proportio A B ad B, quàm C D ad D. Dico euerso modo, minorem esse A B ad A, quàm C D ad C.

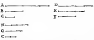


Erit enim disiunctim, per antecedentem, maior proportio A ad B, quàm C ad D. Igitur, per primam harum, econuersò, minor B ad A, quàm D ad C. Quare, per tertiam earundem, coniunctim, minor erit A B ad A, quàm C D ad C, Quod erat demonstrandum.

V I.

Si fuerint tres Quantitates vnius ordinis, totidemq; alterius: fueritq; primæ priorũ ad secundam, maior proportio, quàm primæ posteriorum ad secundam: erit quoque primæ priorum ad tertiam, maior proportio, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

Sint tres Quantitates vnius ordinis A, B, C: aliæq, totidem alterius, D, E, F. Et sit maior proportio A ad B, quàm D ad E: Itemq, maior B ad C, quàm E ad F. Dico maiorem esse A ad C, quàm D ad F.



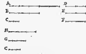
Sit enim G ad C vt E ad F. Eritq., ex priori parte decimæ huius, G minor B. Ob id, ex secunda parte octauæ, maior est ratio A ad G, quàm A ad B. Multò maior igitur est A ad G, quàm D ad E. Sit itaque H ad G vt D ad E. Eritq, ex priori parte decimæ, A maior quàm H. Ob idq;, ex priori parte octauæ, maior ratio A ad C, quàm H ad C. Atqui H ad C, per Æquam proportionalitatem, est vt D ad F: est enim H ad G vt D ad E: & G ad C vt E ad F. Quare, per duodecimam, A ad C maior est, quàm D ad F, Quod erat demonstrandum.

V I I.

Si fuerint tres Quantitates vnius ordinis, totidemq; alterius, fueritq; proportio secundæ priorum ad tertiam maior quàm primæ posteriorum ad secundam, itemq; primæ priorum ad secundam, maior quàm

secundæ posteriorum ad tertiam: erit & maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

Sint tres Quantitates vnius ordinis, A, B, C: & aliæ totidem D, E, F, alterius: sitq; maior proportio B ad C, quàm D ad E: & maior A ad B, quàm E ad F. Dico maiorem esse A ad C, quàm D ad F. Hęc ad Æquam proportionalitatẽ pertinet.

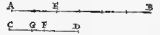


Sit enim G ad C vt D ad E. Et erit, per priorem partem decimæ huius, G minor B: ob id, per secundam partem octauæ, maior proportio A ad G, quàm ad B. Quapropter multo maior A ad G, quàm E ad F. Sit itaque H ad G vt E ad F. Eritq;, ex priori parte decimæ, A maior H: ob idq;, proportio A ad C maior quàm H ad C, per priorem partem octauæ. Atqui, per vigesimamtertiam, proportio H ad C est vt D ad F: quum sit G ad C vt D ad E, & H ad G vt E ad F. Quare, per duodecimam, maior est proportio A ad C, quàm D ad F, Quod erat demonstrandum.

V I I I.

Si fuerit proportio totius ad totum, maior quàm ablati ad ablatum: erit & reliqui ad reliquum, maior proportio, quàm totius ad totum.

Sint duæ Quantitates, AB & CD: à quibus abscindantur AE & CF, sintq́, reliqua EB & FD: & sit maior proportio AB ad CD, quàm AE ad CF. Dico & maiorem esse proportionem EB ad FD, quàm AB ad CD.



Erit enim, per secundam additarum, permutatim, maior proportio AB ad AE, quàm CD ad CF. Ob idq;, ex quinta earundem, erit euersim, minor proportio AB ad EB, quàm CD ad CF. Quare rursus permutatim, minor proportio AB ad CD, quàm EB ad FD, Quod erat demonstrandum.

I X.

Si fuerint tres Quantitates vnius ordinis, ac totidem alterius, fueritq; cuiuslibet antecedentis ad comparem, maior proportio, quàm cuiusquam subsequentis ad suam: erit & harum omnium ad omnes illas maior proportio, quàm alicuius subsequentium ad suã comparem, aut etiam quàm omnium ad omnes: minor autem, quàm prima ad primam.

Sint tres Magnitudines vnius ordinis, A, B, C: ac totidem alterius, D, E, F: sitq; maior proportio A ad D, quàm B ad E: & B ad F, quàm C ad F. Dico proportionem ABC simul sumptarum, ad DET simul sumptas, maiorem quàm B ad E, & quàm C ad F: maiorem etiam quàm B & C simul sumptarum ad E & F simul sumptas: minorem autem, quàm A ad D.

Quum enim sit A ad D maior quàm B ad E: erit permutatim, A ad B maior

quàm



quàm D ad E: & coniunctim, AB ad E, maior quàm DE ad E. Et iterum permutatim, AB ad DE maior quàm B ad E. Quare, per antecedentem, A ad D maior quàm AB ad DE. Atque eodem modo probabitur maior ratio B ad E, quàm BC ad EF. Maior itaque est A ad D, quàm BC ad EF. Quare permutatim, maior est A ad BC, quàm D ad EF. Et coniunctim, maior ABC ad BC, quàm DEF ad EF: Et iterum permutatim, maior ABC ad DEF, quàm CB ad EF: Quare, per antecedentem, maior est A ad D, quàm ABD ad DEF, Quod erat demonstrandum.

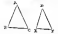
Libri Quinti Geometricorum Elementorum

FINIS.

IACOBI PELETARII CENOMANI IN EVCLIDIS ELEMENTA GEOMETRICA DEMONSTRATIONVM LIBER SEXTVS.

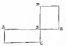
DEFINITIONES.

Similes Figuræ dicuntur, quæ angulos æquales habent ad vnũ, & latera quæ angulos æquales habent, proportionalia.



Vt si fuerint duorum Triangulorum ABC & DEF, anguli mutuò æquales: nempè angulus A angulo D: & angulus B angulo E: fueritq́, latus AB ad latus DE, vt AC ad DF & BC ad EF: erunt hæc duo Triangula similia.

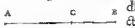
2 Reciprocæ Figuræ dicuntur, quum vtriusque ipsarum mutua latera fuerint proportionalia.



Vt si fuerint duæ Figuræ, verbi gratia, Quadrilateræ, ABC & DBE: fueritq́, latus AB ad latus BD, sicut latus BE ad latus BC: hæ duæ dicuntur Reciprocæ. Sic enim stat proportionalitas, vt duo latera vnius sint antecedentia, & duo alterius sint consequentia. Atque eam ob causam, à nonnullis satis appositè vocantur Figuræ mutuorum laterum.

3 Per mediam & extremam rationem diuidi recta linea dicitur, quum sic fuerit tota ad maius segmentum, vt maius segmentum ad minus.

Id est, quod vulgò dicitur, linea diuidi secundùm proportionem habentem medium & duo extrema. Vt si fuerit linea AB sic diuisa in puncto C, vt sit tota AB ad segmentum AC, vt idem AC ad CB.



Hanc diuisionem docuit vndecima Secundi, sed nulla proportionum mentione: quod nominatim docebit trigesima huius.

4 Altitudo Figuræ, est linea à vertice ad basin perpendiculariter deducta.

Triang

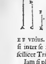
Trianguli A B C altitudo, est perpendicularis A D. Rectum enim, vt anteà monuimus, omnia metitur. Vbi duarum linearum æquidistantia intelligitur: scilicet linea duci per punctum A, quæ sit basi B C parallelus. Quòd si basis poneretur A B, huic duceretur parallelus per punctum C: sicut & ipsi A C (si fungeretur vice basis) per punctum B. Atque ab eo puncto vbi vertex esset, demitteretur perpendicularis, quæ altitudinem monstraret.



Ratio ex duabus rationibus aut ex pluribus constare dicitur, quum rationes Quantitatum inter se multiplicatæ, aliquam rationem efficiunt.

Rationes Quantitatum hoc loco dicuntur denominationes ipsarum proportionum. Ob id, vocem Quantitatis generaliorem quàm Magnitudinis vsurpauit, vt significaret hunc locum sine Numerorum consideratione præteriri non posse.

Si itaque fuerint tres Quantitates A B, C D, & E F, quarum C D media: constabit ratio primæ A B ad vltimam E F, ex ductu rationis quam habet A B ad C D in rationem quam habet C D ad E F.



Hoc igitur totum ex eo sumptum est, quòd Medij officium sit, extrema coniungere & colligare. Quod nos Numerorum auxilio declarabimus.

Ponatur enim ratio A B primæ ad C D mediam, sesquiplex seu sesquialtera: sed C D mediæ ad E F extremam, dupla. Scilicet, quum A B ad C D sit sesquialtera: qualium partium est A B trium, talium C D sit duarum: Quumq; C D sit ad E F dupla: qualium duarum est C D, talis sit E F vnius. Habes itaque duos Denominatores Proportionum, nempè $\frac{3}{2}$ & $\frac{2}{1}$: quos si inter se multiplicaueris, conflabitur Denominatio primæ A B ad vltimam E F: scilicet Tripla.

Iam si plura sint Media, eadem etiam ex ijs constabit ratio, ac si vnicum esset. Vt si inter A B & E F, earundem quas posuimus partium, statuatur alterum Medium G H: manebit etiamnum ratio A B ad E F composita ex tribus rationibus, quæ ex duabus modò componebatur, quantacunque sit G H.



Sit enim vt priùs, A B ad C D ratio sesquialtera: C D verò ad G H: subdupla: erit G H ad E F, quadrupla. Ducantur iam tres Denominatores inter se: scilicet $\frac{3}{2}$ in $\frac{1}{2}$, fit $\frac{3}{4}$: Et $\frac{3}{4}$ in $\frac{4}{1}$, fit $\frac{12}{4}$, id est Tripla denominatio. Quare, vt priùs, A B ad E F tripla ratio, sed ex tribus rationibus composita. Quot igitur erunt termini, vt vocant, in tot partes diuidetur ratio primę Quantitatis ad vltimam, dempta vnitate: seu mauis, quot medij erunt termini, in tot partes diuidetur ratio, ac prætereà in vnam. Atque vt vno verbo dicam, inter duas Quantitates, alias medias Quantitates collocare: nil aliud est, quàm proportionem ambarum in partes arbitrarias diuidere. Atque hoc satis esse putamus ad præsens institutum. Hæc enim qui ampliora cupiet, ex Arithmeticis petat. Proportionum verò materiam in Tertio nostræ Arithmeticæ Libro abundè tractauimus.

SCIO NON defuturos qui non probent, quòd Quantitatum rationes dixerim: non vt Euclides reliquit, Rationum quantitates. Quibus ego breuiter respondeo, me id vt doctrinæ consulerem fecisse. Nam si exempli causa quantitatem 4 ad quantitatem 2, duplam habere rationem dixero, scienter & significanter dixero. Si verò rationi duplæ quantitatem esse: obscurè & implicatè. Nam quum Quantitati ratio insit: rursus Rationi quantitatem inesse, circuitionem importat, quæ in disciplinis maximè fugienda est. Ratio igitur nobis ea est, quæ denominationem præ se fert: vt dupla, tripla, & quæ sunt eiusmodi. Atque hæ inter se multiplicant

plicantur: ſcilicet dupla ratio in triplam, quæ ſextuplam parit; ac cæteræ ſuo modo. Neque hîc Quantitas in Quantitatem ducitur, vt linea in lineam. Sic enim fieret Parallelogrammum: quod huic loco eſt alienum. At nihil multiplicatur niſi quod quantum eſt. Certè. Et fateor quidem Rationes quantas eſſe. Sed circuitum illum vitare volui. Vnicuique tamen vt quantitates Rationum dicat, per me licet. Hîc enim agitur non dicendi, ſed docendi ratio.

Id etiam obiter monebimus, hanc Rationum compoſitionem, non eſſe Proportionum Additionem, vt quidam putarunt. Aliud quippè eſt, Rationes alias ex alijs componere, & aliud Rationes rationibus adiungere. Quod & in Arithmeticis docuimus. Nos ad Propoſitiones ingrediamur.

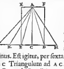
*

THEOREMA PRIMVM, PROPOSITIO PRIMA.

Triangula eiuſdem altitudinis, itidem & Parallelogramma, inter ſe ſunt vt baſes.

Sint duo Triangula ABC & ACD, eiuſdem altitudinis. Dico vt eſt BC baſis ad CD baſin, ſic eſſe ABC Triangulum ad ACD Triangulum. Sint etiam Parallelogramma CE & CF, eiuſdem altitudinis. Dico itidem vt BC baſis ad CD baſin, ſic CE Parallelogrammum ad FC Parallelogrammum.

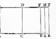
Producam BD vtrinque in G, H puncta: Et ponam duas BK & KG ipſi CB ęquales: & DH ipſi CD. Tum connectam AG, AK, & AH. Eruntq́, Triangula ABC, AKB, & AGK inter ſe æqualia, per trigeſimamoctauam Primi: itidem & Triangula ACD & ADH, per eandem, inter ſe æqualia. Ac proindè Triangulum AGC tam multiplex Trianguli ABC, quàm baſis GC multiplex ipſius baſis BC. Itemq́; Triangulum ACH, Trianguli ACD tam multiplex, quàm baſis CH ipſius baſis CD. Et per eandem Primi, ſi GC baſis æqualis eſt CH baſi: erit & Triangulum AGC æquale Triangulo ACH: & ſi maius, maius: & ſi minus, minus. Eſt igitur, per ſextam Definitionem Quinti, ſicut BC baſis ad CD baſin, ita ABC Triangulum ad ACD Triangulum, Quod eſt prius.



Quumq́, Parallelogrammum EC duplum ſit Trianguli ABC, per quadrageſimamprimam Primi: & Parallelogrammum FC, duplum Trianguli ACD, per eandem: erit, per decimamquintam Quinti, vt Triangulum ABC ad Triangulum ACD, ſic Parallelogrammum EC ad Parallelogrammum FC, Quod fuit demonſtrandum.

HOC AVTEM in communi iudicio totum poſitum eſt. Quod ſic probabimus, vt Demonſtrationis vice eſſe poſſit: ſimul oſtendemus quánam ratione inducatur Trigeſimaoctaua Primi ad probationem exceſſus & imminutionis Æquemultiplicium, quum ipſa de æqualitate tantùm propoſuerit.

Sit Parallelogrammum ABCD, eiuſdem altitudinis vt Parallelogrammum DCEF. Dico vt eſt BC baſis ad CF baſin, ſic eſſe ABCD Parallelogrammum ad DCEF, Parallelogrammum.



Primùm enim ſi æquales ſint baſes, non eſt dubium quin eadem ſit ratio baſium & Parallelogrammorum: quum ſint & Parallelogramma æqualia, per ipſam Trigeſimamoctauam Primi. Si vero inæquales fuerint: neque Parallelogramma æqualia eſſe poſſunt, per eandem. Sit ergo BC maior CE, quam excedat quantitate EG: vt ſcilicet CG ſit æqualis ipſi BC. Et ducatur parallelus GH, perficiaturq́, Parallelogrammum DCGH. Et erit ex ipſa iam inducta Propoſitione, Parallelogrammum ABCD æquale Parallelogrammo DCGH. Quapropter, ex communi Notione, ſicut DCGH maius eſt DCEF, ita ABCD maius eſt eodem DCEF. Ac propterea, quum BC maior ſit CE, erit ſimul ABCD maius DCEF. Simili argumentatione probabitur, ſi BC minor ſit CE, ſimul ABCD maius eſſe ipſo DCEF. Vnde colligitur vt BC baſis ad CE baſin, ita ABCD Parallelogrammum ad DCEF Parallelogrammum. Nihil enim refert vtrum dicas, non poſſe eſſe primum maius ſecundo, quin tertium ſit maius quarto. neque æquale, quin æquale: neque minus quin minus: an verò dicas, vt

primum

primum ad secundum, ita tertium ad quartum: licet illud nominatim ab Euclide positum sit Æquemultiplicium gratia, vt notum est ex Quinto. Atque hoc dictum volui, vt vbique admonerem, Æqualitatem esse omnium Proportionum originem & ducem.

THEOREMA 2, PROPOSITIO II.

Si Trianguli duo latera recta linea sic secet, vt ipsa ad reliquum sit parallelus: duo latera proportionaliter secabit: & si proportionaliter duo latera secet: erit ipsa ad reliquum parallelus.

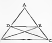
Sit Triangulum ABC, cuius duo latera AB & AC sic secet recta DE, vt ipsa sit lateri BC parallelus. Dico priùs vt est BD ad DA, sic esse CE ad EA.

Connectantur BE & CD. Eritq;, per trigesimamseptimam Primi, Triangulum BED æquale Triangulo CED: Sunt enim inter Parallelos DE & BC, & eandem habent basin ED. Vtrunque igitur ad Triangulum AED eandem habet rationem, per septimam Quinti. Erit itaque vt BED ad AED, ita BD ad DA, per antecedentem: quum eundem habeant verticem E: similiter, per eandem, sicut CED ad AED, ita CE ad EA: eundem enim habent verticem D. Quare, per vndecimam Quinti, BD ad DA, sicut CE ad EA, Quod est prius.



Iam sit BD ad DA vt CE ad EA. Dico DE esse ipsi BC parallelum. Erit enim, per antecedentem & per vndecimam Quinti, Trianguli AED ad vtrunque BED & CED, proportio vna. Itaque, per secundam partem nonæ Quinti, duo BED & CED Triangula æqualia. Quare quum eandem habeant basin DE, & ex eadem parte: erunt, per Trigesimamnonam Primi, inter duas Parallelos, Quod erat demonstrandum.

HVIVS etiam Theorematis rationem ab Æquali ductam esse satis manifestum est. Sit enim Triangulum ABC duorũ laterum AB & AC æqualium, quæ secentur à linea recta DE, quæ ipsi BC sit parallelus. Et constat ex vigesimanona Primi, quatuor angulos B, C, D, & E, esse æquales: vnde per quintam eiusdem, duo AD & AE latera, Trianguli AED, æqualia. Ex communi igitur Notione, DB ipsi EC æqualis. Quare AD ad DB vt AE ad EC, Quod est prius.



Iam connectantur BE & CD. Et quoniam ponitur AD ad DB vt AE ad EC: erit per antecedentem & per vndecimam Quinti, Trianguli ADE ad vtrunque BDE & CED proportio vna. Vtrunque igitur æquale, per alteram partem nonæ Quinti. Quare, per trigesimamnonam Primi, ipsa inter duas Parallelos consistunt, Quod erat ostendendum.

Vides Parallelorum officio conseruari ius Æqualitatis: vt in superiori, immò vt in Demonstrationibus Geometricis passim apparet.

THEOREMA 3, PROPOSITIO III.

Si recta linea angulum Trianguli bifariam secans, secuerit & basin: erunt duo segmenta inter se, sicut duo reliqua Trianguli latera: Et si segmenta fuerint vt duo reliqua Trianguli latera: linea basin secans, & angulum oppositum bifariam secabit.

Sit

Sit Triangulum A B C, cuius angulum A diuidat linea A D bifariam. Dico B D ad D C esse vt A B ad A C. Et si B D ad D C vt A B ad A C: angulum bifariam esse diuisum.

Ducam B E æquidistantem D A: Et protraham C A donec concurrat cum B E ad punctum E. Et erit, per priorem partem vigesimænonæ Primi, angulus E B A æqualis angulo B A D. Et, per alteram partem eiusdem, angulus E æqualis angulo D A C. Quapropter, ex animi Notione, angulus E æqualis angulo A B E. Itaque, per sextam Primi, A B & A E æquales. Ob idq́; per priorem partem septimæ Quinti, erit E A ad A C vt A B ad A C. At, per antecedentem, E A ad A C vt B D ad D C. Quapropter A B ad A C vt B D ad D C, Quod est prius.



Sit iam, manente eadem constructione, A B ad A C vt B D ad D C. Et quia, per antecedentem, E A ad A C est vt B D ad D C: erit E A ad A C, vt A B ad A C. Itaque, per priorem partem nonæ Quinti, E A & A B sunt æquales. Quapropter, per quintam Primi, duo anguli E & E B A æquales. Quare, per vigesimamnonam Primi & animi Notionem, angulus B A D æqualis est angulo C A D, Quod fuit probandum.

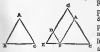
E S T autem hæc constructio dimidia pars illius Figuræ Gnomonicæ quam in Quadragesimatertia Primi ad omnes Demonstrationes Geometricas locupletissimam esse diximus: quæq́; omnibus ferè huius libri Sexti Propositionibus accommodatur, vt posterius cognoscent qui compositiones Figurarum diligenter attenderint.

THEOREMA 4. PROPOSITIO IIII.

Aequiangulorum Triangulorum, latera quæ circũ ęquales angulos, sunt proportionalia.

Sint Triangula A B C & D E F æquiangula: sitq́, angulus A, æqualis angulo D: & angulus B, angulo E: & angulus C, angulo F. Dico esse D E ad D F ad A C, sicut E F ad B C.

Producam vnum laterum alterutrius Trianguli, vt latus E F: & faciam F C æqualem B C. Tum à puncto F ducam F A æquidistantem E D, & æqualem ipsi A B: Et connectam A C. Eritq́; Triangulum A F C æquale & æquilaterum Triangulo A B C, per quartam Primi: propterea quòd angulus A F C æqualis est angulo E, per vigesimamnonam eiusdem, & duo latera A F & F C posita sunt æqualia duobus A B & B C. Ob id, angulus F A C æqualis angulo B A C: ob idq́;, angulo D. Reliquus igitur E F D, reliquo C æqualis. Itaq;, per priorẽ partem vigesimæoctauæ eiusdem, A C & D F Paralleli. Productis igitur C A & E D, compleo Parallelogrammum F G. Et erit, per trigesimamquartã Primi, A G æqualis D F: & D G ęqualis A F. Quoniam ergo, per secundam huius, G A ad A C sicut E F ad F C: & per eandẽ, E F ad F C sicut E D ad D G: erit, per septimam Quinti, D F (quia æqualis G A) ad A C: ac, per eandẽ, E D ad F A (æqualem ipsi D G) sicut E F ad F C, Quod fuit demonstrandum.



A L I T E R vt Theod. Eadem constructione, erit per secundam huius, vt E D ad D G (ac propterea per vndecimam Quinti, vt E D ad F A) sic E F ad F C. Et permutatim igitur, per decimamsextam Quinti, vt E D ad E F, sic F A ad F C. Rursus, per eandem huius, vt E F ad F C, ita G A (ac propterea, ita D F) ad A C: Et permutatim vt E F ad D F, ita F C ad A C. Sed probatum est vt E D ad E F, sic F A ad A C. Ex æquali igitur, per vigesimamsecundam Quinti, vt E D ad D F, ita F A ad A C. Quare Triangulorum æquiangulorum latera proportionalia, Quod erat demonstrandum.

QVVM autem hoc Theorema sit vsitatissimum, neque ferè vllum in Dimensionibus occurrat frequentius: triplicem Triangulorum Æquiangulorum constitutionem exponendam esse duximus: quarum primam iam tradidimus, ex veterum præscripto: scilicet, quum Triangula super eandem lineam rectam construuntur: qualia hoc loco EDF & FAC, super lineam EC: nisi quòd compositionem aliquantùm variauimus: schemate tamen eodem retento. Altera igitur ostensionis ratio erit ex Triangulis Æquiangulis, quæ aliud in aliud inseruntur.

Sint duo Triangula ABC & DBE, æquiangula: vt angulus A sit æqualis angulo D: & angulus B vnius, æqualis angulo B alterius: angulusq; C, angulo E. Dico esse BD ad BA & BE ad BC, vt DE ad AC.

Quoniam enim angulus D æqualis est angulo A: erunt, per vigesimamoctauam Primi, AC & DE paralleli. Protraho CB ad punctum F: & pono EF æqualem CB: Itidem protraho ED ad punctum G: & pono EG æqualem CA: & connecto FG. Et quia angulus GEF æqualis est angulo C: & duo latera EF & EG, sunt æqualia duobus CB & CA: erit Triangulum GEF, Triangulo ABC æquale & æquilaterum, per quartam Primi: & per vigesimamoctauam eiusdem, FG ipsi BA parallelus. Sic itaque argumentationem instituemus. Quoniam DE ipsi AC est parallelus: erit, per secundam huius, AD ad DB vt CE ad EB: Quapropter coniunctim, per decimamoctauam Quinti, vt AB ad DB, sic CB ad EB. Simili ratione, quia BD ipsi FG est parallelus: erit, per secundam huius, FB ad BE vt GD ad DE: Ergo coniunctim, FE (ac propterea, BC) ad BE, sicut GE (ac propterea, sicut AC) ad DE. At probatum est vt AB ad DB, sic CB ad EB. Quare, per vndecimam Quinti, vt AB ad DB & CB ad EB, ita AC ad DE, Quod erat demonstrandum. Atque ea est altera Triangulorum Æquiangulorum compositio.



Tertia verò est ad decussationem inter duas parallelos: qualia sunt in subiecta Figura Gnomonica, duo Triangula ABC & BDE: quorum duæ bases AC & DE sunt paralleli: atque inter has, duæ lineæ AE & CD, se decussantes in puncto B, ac duo ipsa Triangula ABC & BDE cum ipsis parallelis, constituentes. Figuram autem Gnomonicam compleuimus, vt fœcunditatem ipsius vbique obuiam ostenderemus. Habes enim vno intuitu triplicem positionem Triangulorum Æquiangulorum. Scilicet in dimidio Parallelogrammo, duorum Triangulorum ABC & BEG, super AE Dimetiente: ac tantundem in altera medietate Parallelogrammi. Quæ positio ad primam demonstrationem pertinet. Alteram duorum Triangulorum AEK & BEG, etiam æquiangulorum: quorum minus intra maius insitum est: sicut & BED in AEH. Quod in secunda formula exhibuimus.



Tertiam habes positionẽ duorum ABC & BDE, itidemq; ABF & BEG. Quorum probatio satis manifesta est, ex iis quæ iam antè tradidimus.

ATQVE hîc etiam si diligenter animaduerteris, comperies ex Triangulorum probatione, Parallelogrammorum probationem consequi: quum constiterit sicut AC ad CB, ita BG ad GE. Sed hæc iam pluribus verbis non indigent.

Quarta erat Triangulorum Æquiangulorũ positio circa eandem Dimetientem: qualia sunt ABC & ABF: item BEG & BED. Quæ quia sunt æqualia, demonstrationem non requirunt, sed ad aliorum probationem accommodantur.

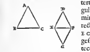
THEOREMA 5, PROPOSITIO V.

Triangula proportionalium laterum, æquales habent angulos sub quibus latera proportionalia subtenduntur.

Hæc

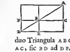
Hæc est Conuersa antecedentis. Sint duo Triangula ABC & DEF: sitq; AB ad DE, & AC ad DF, vt BC ad EF. Dico angulum A esse æqualem angulo D: & angulum B, angulo E: & angulum C, angulo F.

Super lineam EF, ex aduersa parte Trianguli DEF, constituam, per vigesimamtertiam Primi, angulum FEC æqualem angulo B: & angulum EFG æqualem angulo C. Eruntq; duo constituti, minores duobus rectis, quia æquales minoribus duobus rectis, per decimamseptimam Primi. Concurrent igitur EC & FC, vt ad punctum C. Eritq; angulus C, per trigesimamsecundam Primi, æqualis angulo A. Itaque, per antecedentem, AB ad EG & AC ad FC, vt BC ad EF: ob idq;, AB ad DE sicut ad EC. & AC ad DF sicut ad FC, per vndecimam Quinti. Igitur, per alteram partem nonæ eiusdem, erit DE æqualis EC: & DF æqualis FG. Quapropter, ex octaua Primi, duo Triangula DEF & GEF sunt æquiangula. Quum igitur Triangulum GEF sit æquiangulum Triangulo ABC: erit & DEF eidem ABC æquiangulum, Quod erat demonstrandum.



SED & hæc probatio ex Figura Gnomonica elicitur. Sint enim duo Triangula ABC & DBE: sitq; AB ad AC, vt BD ad BE: & AB ad BC, vt BD ad ED. Dico angulos proportionalibus lateribus contentos, esse æquales.

Ponam latus AB vnius, in directum lateris BD alterius: vt sint ABC & BDE Triangula, super lineam vnam AD. Et ducam DF parallelum ipsi CA, quæ concurrat cum CB protracto ad punctum F. Quia ergo, per decimamquintã Primi, angulus DBF æqualis est angulo ABC: & per vigesimamnonam eiusdem, angulus BDF, angulo BAC: erunt per trigesimamsecundam eiusdem, duo Triangula ABC & BFD, æquiangula. Itaque, per antecedentem, vt AB ad AC, sic BD ad DF. Sed vt AB ad AC, sic positum est BD ad BE. Est igitur, per nonam Quinti, DF ipsi EB æqualis. Rursus per antecedentem, vt AB ad BC, sic BD ad BF. Sed vt AB ad BC, sic BD ad DE. Sunt igitur, per eandem Quinti, BF & ED latera æqualia. Itaque, per octauam Primi, duo BDF & BED Triangula sunt æquiangula. Quare ABC & BDE æquiangula, Quod erat demonstrandum.

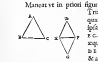


THEOREMA 6, PROPOSITIO VI.

Duo Triangula, vnum angulum vni angulo æqualem habentia, & quæ circum æquales angulos latera proportionalia: inter se sunt æquiangula.

Sint duo Triangula ABC & DEF: sitq; angulus B æqualis angulo E: & AB ad DE vt BC ad EF. Dico duo Triangula esse æquiangula.

Maneat vt in priori figuratione antecedentis, Triangulum ECF ex aduerso Trianguli DEF, æquiangulum ipsi ABC. Et erit, per quartam huius, AB ad EG vt BC ad EF: ob idque, ex ipsa hypothesi & vndecima Quinti, AB ad DE vt AB ad EG. Itaque, per secundam partem nonæ Quinti, DE est æqualis EG. Quia ergo duo latera DE & EF, Trianguli DEF, sunt æqualia duobus EG & EF, Trianguli ECF: & angulus B vnius, æqualis angulo E alterius, quum vterq; sit æqualis angulo B: erunt per quartam Primi, DEF & CEF æquiangula. Quum igitur EGF sit ipsi ABC æquiangulum: erit & DEF eidem ABC æquiangulum, Quod erat demonstrandum. Sed & idem ex Figura Gnomonica probabitur.

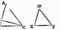


THEOREMA 7, PROPOSITIO VII.

Si duo Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habuerint, & quæ circa duos ex reliquis angulis latera, proportionalia: reliquorum verò duorum vterque aut neuter fuerit recto minor: æquiangula erunt Triangula, & anguli proportionalibus lateribus contenti, æquales.

Sint duo Triangula ABC & DEF: sitq́, angulus A æqualis angulo D, & ratio AC ad DF vt CB ad FE: & vterque duorum angulorum B & E, aut neuter sit minor recto. Dico Triangula esse æquiangula, & angulos proportionalibus lateribus contentos esse æquales.

Iam enim si angulus C fuerit æqualis angulo F, constat ipsa esse æquiangula, ex antecedente. Si verò inæquales fuerint, sit maior C: & ponatur angulus ACG æqualis angulo F, per vigesimamtertiam Primi. Eritq́, per trigesimamsecundam eiusdem, Triangulum AGC, Triangulo DEF æquiangulum. Itaque, per quartam huius, AC ad DF vt GC ad EF. Sed sic fuit BC ad EF. Igitur, per nonam Quinti GC & BC sunt æquales: ob idq́, per quintam Primi, angulus B, æqualis angulo BGC. Si ergo neuter duorum B & E fuerit minor recto, erunt duo anguli B & G, Trianguli BGC, non minores duobus rectis, repugnante decimaseptima Primi. Sin vterque fuerit minor recto, erit angulus AGC maior recto, per decimamtertiam eiusdem, ac propterea angulus E maior recto, contra hypothesin. Non ergo inæqualis est angulus ACB ipsi F angulo. Quare ABC Triangulum, ipsi DEF Triangulo æquiangulum, & anguli proportionalibus lateribus comprehensi æquales, Quod erat demonstrandum.



PONITVR autem vterque C & E, aut neuter minor recto: vt deducamus ad absurdum. Scilicet quum reperiantur duæ lineæ GC & BC æquales, erunt duo anguli B & CGB æquales, per quintam Primi. Si ergo vterque E & B sit minor recto, erit & AGC minor recto, vtpotè ipsi E æqualis. Quare, per decimamtertiam Primi, erit CGB maior recto: ergo & B maior eodem: qui positus fuerat minor. Si verò neuter B & E sit minor recto, erit vterque, minimùm, rectus: Quapropter & CGB rectus, per quintam Primi: repugnante decimaseptima eiusdem.

THEOREMA 8, PROPOSITIO VIII.

Ab angulo recto Trianguli perpendicularis ad basin demissa, Triangulum in duo Triangula secat, similia toti & inter se.

Sit Triangulum ABC, cuius angulus A rectus: sitq́; AD perpendicularis ad BC basin. Dico duo Triangula ABD & ADC, toti ABC Triangulo & inter se esse similia.



Nam quum vtrunque sit rectangulum, & vterque habeat vnum angulorum toti Triangulo communem: erunt per trigesimamsecundam Primi, toti æquiangula: quapropter & inter se. Scilicet, angulus B æqualis angulo CAD: & angulus C, angulo BAD: & duo anguli qui ad D, recti sicut & angulus BAC. Quod & nos suprà ad quadragesimamseptimam Primi demonstrauimus. Itaque, per quartam huius, latera æquos angulos continentia, proportionalia. Quare Triangula, toti & inter se similia, Quod fuit ostendendum.

Consectarium.

Perpendicularis à recto angulo Trianguli ad basin deducta, inter duo basis segmenta proportionalis est: Et vtrunuis laterum inter basin & segmentum sibi conterminum, proportionale.

Vt AD perpendicularis, media proportionalis est inter BD & DC segmenta. Et AB latus, inter BC basin & BD segmentum: itidem AC latus, inter ipsam BC basin & DC segmentum, proportionale est.

PROBLEMA 1, PROPOSITIO IX.
Theoni 13.

Inter duas lineas rectas, mediã proportionalem inuenire.

Sint duæ lineæ rectæ AB & BC, inter quas sit inuenienda media proportionalis.

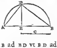


Ponam BC in continuum ipsius AB: vt sit AC linea vna. Super quam describam Semicirculum ADC. Et à puncto B, erigam BD perpendicularem. Hanc dico esse mediam inter AB & BC.

Connectantur DA & DC. Et erit, per trigesimamtertij, angulus ADC rectus. Quare, per Consectarium antecedentis, AB ad BD vt BD ad BC, Quod erat faciendum.

ALITER. Sint duæ lineæ AB & C, quarum maior AB (Nam inter æquales, media est æqualis). Volo inter ipsas constituere proportionalem.

Super AB describo Semicirculum ADB: & pono EB æqualem ipsi C. Tum ab E puncto, excito perpendicularem ED: Et connecto AD & BD. Dico BD esse mediam proportionalem inter AB & EB: hoc est, inter AB & C.



Constat quippe ex trigesima Tertij, angulum ADB esse rectum: & ex antecedente, duo Triangula AED & BED esse inter se & toti ADB similia. Quare per quartam huius, AB ad BD vt BD ad EB: ob idq̃, vt BD ad C, Quod erat faciendum.

IN HAC igitur constructione, vno intuitu triplex conspicitur proportionalitas. Est enim BD media inter AB & EB, vt iam probauimus: sed & AD media inter AB & AE: Ac tertiò ED media inter AE & EB segmenta.

Dato Medio proportionali, in data linea duo extrema reperire. Oportet autem datum Medium dimidia parte datæ lineæ non esse maius.

Sit datum Medium AB, data vero linea BC. Volo in BC duo extrema proportionalia reperire, inter quæ sit AB medium proportionale. Modò tamen AB non sit maius dimidia parte ipsius BC. Nam sic medium esse non posset.

Iungo AB & BC, vt AC sit linea vna. Tum super BC describo Semicirculum



BBC. Et à puncto A, erigo perpendicularẽ AD: quam pono ipsi AB æqualem. Et per punctum D duco DE, parallelum ipsi AC: quæ omninò secabit, aut continget Semicirculum, vt in puncto E: quum AD non sit maior Semidiametro. Tum à puncto E, demitto EF perpendicularem ipsi BC. Dico BC sic diuisam in puncto F, vt AB sit media proportionalis inter BF & FC.



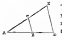
Hoc autem satis manifestum est ex ipsa trigesima Tertij & Consectario antecedentis. Nam quum FE sit equalis AD, per trigesimamquartam Primi: ob idq́, ipsi AB: ductis lineis BE & CE, fiet Triangulum BEC Rectangulum. Ob id, ex ipso Consectario, erit BF ad FE (ob idq́;, ad ipsam AB) vt FE ad FC, Quod fuit faciendum.

PROBLEMA 2, PROPOSITIO X.

Theoni 11.

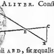
Duabus lineis propositis tertiam continuè proportionalem adiungere.

Sint duæ lineæ AB & AC, quibus sit addenda tertia continuè proportionalis.

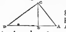


Coniungo ipsas AC & AB ad angulum arbitrarium BAC. Tum protracta AB, facio BD æqualem ipsi AC. Et connexa BC, duco DE, pararallelum ipsi BC: & protraho AC: donec concurrat cum DE ad E punctum. Dico lineam CE esse tertiam ad duas AB & AC continuè proportionalem.

Est enim, per secundam huius, AB ad BD sicut AC ad CE: Sed AB ad BD sicut AB ad AC, per alteram partem septimæ Quinti. Quare AB ad AC sicut AC ad CE, Quod erat faciendum.



ALITER. Constituo AB & BC datas, in directum. Tum super punctum A erigo AD lineam, ad angulum arbitrarium: quam facio æqualem ipsi BC. Et à puncto D, per punctum B, duco transuersam DE: ad quam demitto concurrentem CE, parallelum ipsi AD. Dico CE esse tertiam proportionalem ad AB & BC. Quum enim, per decimamquintam Primi, angulus B, Trianguli ABD, sit æqualis angulo B, Trianguli CBE: & per vigesimamnonam eiusdem angulus A æqualis angulo C, & angulus D angulo E: erit, per quartam huius, AB ad DA sicut DC ad CE. Quare, per vndecimam Quinti, AB ad BC sicut BC ad CE, Quod erat faciendum.



ALITER rursùs. Constituo ipsas AB & BC ad angulum rectum ABC. Et connexa AC, duco à puncto C, perpendicularem CD: quam produco donec concurrat cum AB protracta, ad punctum D. Dico BD esse tertiam proportionalem ad AB & BC. Id verò satis constat ex Consectario octauæ huius.

PROBLEMA 3, PROPOSITIO XI.

Theoni Problema 4, Propositio 12.

Tribus lineis propositis quartam proportionalem adiungere.

Sint tres lineę AB, BC, & AD. Volo his tribus quartā proportionalem adiungere.

Ex AB & BC facio lineam vnam AC: & statuo AD cum AC, ad angulum fortuitum CAD: & connecto DB: cui duco parallelum CE. Tum protraho AD donec concurrat cum CE ad ipsum E punctum. Dico DE esse quartam proportionalem ad AB, BC, & AD.



Erit enim, per secundam huius, sicut AB ad BC, ita AD ad DE, Quod erat faciendum. Sed & hoc patebat ex antecedente: Modò tamen animaduertas tam Continuam quàm Incontinuam proportionalitatem hîc probari: quas Euclides separatim non tractat: vt in Definitionibus Quinti monuimus.

ALITER

ALITER. Sint tres lineæ A B, B C, & B D. Volo ad ipsas addere quartam proportionalem.

Coniungo A B primam cum B D tertia: vt fit A D linea vna A C super hanc erigo B C secundam, ad angulum fortuitum A B C: Et connecto A C. Tum per punctum D duco D E ipsi A C parallelum: quam produco donec concurrat cum C B itidem protracta ad punctum E. Dico B E esse quartam proportionalem ad ipsas A B, B C, & B D: esse scilicet vt A B ad B C, ita B D ad B E.



Quum enim ex decimaquinta & vigesimanona Primi, duo Triangula A B C & D B E sint æquiangula: erit, per quartam huius, A B ad B C vt B D ad B E, Quod erat faciendum.

Hanc Campanus antecedenti Propositioni annexuit, vt Appendicem.

PROBLEMA 4, PROPOSITIO XII.

Theoni Problema 1, Propositio 9.

A data linea constitutam partem abscindere.

Sit data linea A B, à qua sit resecanda, verbi gratia, pars tertia.

Duco lineam A C, quæ cum A B faciat angulum fortuitum C A B. Et in directum A C, continuo C D & D E, ipsi A C æquales: vt sit A E in tres æquales partes diuisa, in punctis C & D. Et connecto E B. Tum à puncto C duco C F parallelum ipsi B E, secantem A B in puncto F. Dico A F esse tertiam partem lineæ A B.

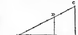


Quoniam enim, per secundam huius, E C ad C A vt B F ad F A: erit coniunctim, E A ad C A vt B A ad F A. Sed A E ad C A tripla: igitur & B A ad F A tripla. Quare A F ipsius A B tertia pars, Quod erat faciendum.

S E D quoniam minutæ denominationes, quales sunt superpartientes & Superparticulares, non ita sunt expeditæ: id negotij obiter explicabimus.

Sit linea A B, à qua resecanda sit pars subsupertripartiens quintas.

Quum Octonarius ad Quinarium sit supertripartiens quintas: ex octo lineolis æqualibus, faciam lineam vnam: cuiusmodi hoc loco est linea A C: quam coniungam ad angulum fortuitum cum ipsa A B diuidenda. Et connexa B C, per punctum quintæ sectionis, quod sit D, ducam D E parallelum ipsi B C. Erit'q; A E ipsa pars quam quærimus lineæ A B, scilicet subsupertripartiens quintas. Quod delineatio ipsa satis ostendit. Nam quum A D sit ad A C subsupertripartiens quintas: sit'q; ex postrema probatione, vt A D ad A C, sic A E ad A B: erit & A E ad A B subsupertripartiens quintas, Quod fuit ostendendum.



PROBLEMA 5, PROPOSITIO XIII.

Theoni Problema 2, Propositio 10.

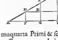
Datam lineã non sectam, datæ lineæ sectæ similiter secare.



Sit data linea non secta, A B: secta verò sit A C, verbi gratia, in tres partes quantascunque, A D, D E, & E C. Volo lineam A B in tot similes partes diuidere.

Iungo A B & A C ad angulum pro arbitrio, B A C. Et connecto B C: Cui per puncta D & E duco parallelos D F

& EG. Has dico diuidere lineam AB in partes similes partibus lineæ AC.



Ducam DH parallelum ipsi AB, secantem BC in puncto H: & GE in puncto K. Et sumptis duobus Triangulis ABC & DHC, erit per secundam huius, ED ad DA vt GF ad FA: similiter CE ad ED vt HK ad KD: ob idq́, vt BG ad GF, per trigesimamquartam Primi, & secundam partem septimæ Quinti, Quod erat faciendum. Toties verò repetitur secunda huius, quot erunt paralleli ipsi BC: sed toties trigesimaquarta Primi & septima Quinti, quot erunt ipsi AB paralleli.

EX HAC habetur facilis ratio diuidendæ lineæ in quascunque partes nominatas. Vt si tripartitò secanda sit: fiet DE æqualis AD: & EC æqualis eidem, per tertiam Primi. Ac tum eodem constructionis modo quo iam vsi sumus, secabitur AB in tres partes æquales.

Idem de cuiuscunque generis partibus erit iudicium.

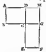
THEOREMA 8, PROPOSITIO XIIII.

Campano 13.

Aequalium Parallelogrammorum, & vnum vni æqualem angulum habentium, reciproca sunt latera quæ circum æquales sunt angulos: Et quorum Parallelogrammorum vnum vni æqualem angulum habentium, reciproca sunt latera quæ circum æquales angulos, ea sunt æqualia.

Sint duo Parallelogramma ABCD & CEFG, æqualia: sitq́, angulus C vnius, æqualis angulo C alterius. Dico esse BC ad CG vt EC ad CD. Et si fuerit BC ad CG vt EC ad CD, fuerintq́, ij duo comprehensi anguli æquales: Dico duo Parallelogramma esse æqualia.

Ponam duo latera BC & CG in directum, vt sit BG linea vna. Eritq́, ED itidem linea vna, per ea quæ demonstrauimus ad decimamquintam Primi. Produco



itaque AD & FG latera donec concurrant ad punctum H. Et erit, per priorem partem septimæ Quinti, vtriusque Parallelogrammi AC & CF ad Parallelogrammum CH, ratio eadem. Et quia per primam huius, Parallelogrammum AC ad Parallelogrammum CH est vt BC basis ad CG basin: & Parallelogrammum CF ad idem CH, vt EC basis ad CD basin: erit, per vndecimam Quinti, BC ad CG vt EC ad CD, Quod est prius.

Esto iam BC ad CG vt EC ad CD. Et erit, per primam huius, BC basis ad CG basin, vt AC Parallelogrammum ad CH Parallelogrammum: Et EC basis ad CD basin, vt CF Parallelogrammum ad idem CH Parallelogrammum. Itaque, per vndecimam Quinti, AC ad CH vt CF ad idem CH. Quare, per priorem partem nonæ eiusdem, Parallelogrammum AC, Parallelogrammo CF est æquale, Quod fuit demonstrandum.

THEOREMA 10, PROPOSITIO XV.

Campano 14.

Aequalium Triangulorum, & vnum vni æqualem angulum habentium, reciproca sunt latera quæ circum

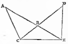
æquales

æquales angulos: Et quorum Triangulorum vnum vni æqualem angulum habentium reciproca sunt latera quæ circum ęquales sunt angulos, ea sunt ęqualia.

Sint duo Triangula æqualia ABC & BDE: sitq́, angulus B vnius, æqualis angulo B alterius. Dico AB ad BE esse vt DB ad BC: Et si fuerit AB ad BE vt DB ad BC, fuerintq́, duo anguli qui ad E, æquales, Triangula esse æqualia.

Iungam duo latera AB & BE, vt sit AE linea vna. Et erit DC linea vna, eadem ratione qua in antecedente: scilicet, per Conuersam Decimæquintæ Primi. Et connectam CE. Eritq́, per priorem partem septimæ Quinti, vtriusque Trianguli ABC & BDE, ad Triāgulum CBE ratio eadem, & quia, per primam huius, est ABC ad BEC vt AB ad BE: & BDE ad idem BEC vt DB ad BC: erit, per vndecimam Quinti AB ad BE vt DB ad BC, Quod est prius.

Esto iam AB ad BE vt DB ad BC, sintq́, duo anguli qui ad B, æquales. Et



erit, per primam huius, AB ad BE vt ABC ad BEC: & DB ad BE vt DEB ad idem BEC. Est igitur, per vndecimam Quinti, vtriusque ABC & DEB ad BEC, ratio eadem. Quare, per priorem partem nonæ eiusdem, ipsa ABC & DEB sunt æqualia, Quod fuit demonstrandum.

HÆC figuratio, si intelligatur connexa AD, erit Quadrilatera cum duabus Dimetientibus. Sed non oportuit esse æquidistantium laterum, quum de solis Triangulis ageretur: neque ijs æquiangulis. Nam sic essent AC & DE paralleli.

Cæterùm hæc mutuorum laterum in Triangulis comparatio, sic colligitur: vt sit AB superior, ad suam directam BE, sicut DB itidem superior, ad suam directam BC. Nam si diceretur AB superior, ad BE, vt CB inferior, ad BD: non responderent singula singulis: neque esset mutua comparatio. Idem intelligo de permutatione aut conuersione.

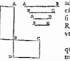
Atque hoc notabile est ad reciprocationis cognitionem. Hoc igitur totum ex duabus Dimetientibus Quadilateri se decussantibus pendet.

THEOREMA II, PROPOSITIO XVI.

Campano 15.

Si quatuor lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis continetur Rectangulum, æquale est ei quod sub mediis: Et si sub extremis comprehensum Rectangulum æquale fuerit ei quod sub mediis, quatuor lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor lineæ AB, BC, BD, & BE proportionales, vt AB ad BC, ita BD

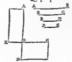


ad BE. Dico Rectangulum comprehensum sub AB & BE, esse æquale Rectangulo comprehenso sub BC & BD: & si Rectangulum comprehensum sub AB & EB, sit æquale Rectangulo quod sub BC & BD: dico & esse AB ad BC vt BD ad BE.

Fiat Rectangulum AE ex AB & BE: Rectangulum quoque CD, ex BC & BD. Et statuantur ad angulos contra se positos, qui ad B: vt clarius sit, totum ex Figura Gnomonica pendere.

Quum itaque sit AB ad BC vt BD ad BE: erit permutatim, AB ad BD vt BC ad

ad BE. Quapropter, in quocunque sint situ Rectangula, quum sint anguli vndiquaque æquales, erunt latera reciprocè proportionalia. Quare, per secundam partem decimæquartæ huius, Parallelogramma æqualia, Quod est prius.

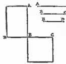


Secundum patet ex priori parte eiusdem. Si enim sint Parallelogramma æqualia: quum omnes anguli sint æquales, latera erunt reciproca. Quare in hoc situ AD lineæ vnius, erit AB ad BD vt BC ad BE: hoc est, permutatim, AB ad BC vt BD ad BE, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 12, PROPOSITIO XVII.

Campano 16.

Si tres lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis continetur Rectangulum, æquale est ei quod à media fit Quadrato: Et si sub extremis comprehensum Rectangulum, æquale fuerit ei quod à media fit Quadrato: ipsæ tres lineæ proportionales erunt.



Sit linea AB ad lineam BC, vt eadem BC ad tertiam BD. Dico Rectangulum comprehensum sub AB & BD esse æquale Quadrato quod ex BC. Et si Rectangulum comprehensum sub AB & BD sit æquale Quadrato BC: esse AB ad BC vt BC ad BD.

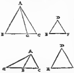
Hoc autem satis manifestum est ex antecedente. Nam linea BC, hoc loco est pro secunda & tertia: BD autem quarta. Hoc igitur Theorema superiori connecti poterat, vt Consectarium.

THEOREMA 13, PROPOSITIO XVIII.

Theoni 19.

Similia Triangula duplã inter se habent rationem, quàm similis rationis latera.

Sint duo Triangula, ABC & DEF, similia: hoc est, per primam Definitionem huius, æquiangula, & laterum proportionalium: Et sit angulus A æqualis angulo D: angulus B, angulo E: & angulus C, angulo F: sitq́, AB ad DE & AC ad DF vt BC ad EF. Dico duplam esse rationem Trianguli ABC ad Triangulum DEF, quàm BC ad EF.



Duabus enim lineis BC & EF addo tertiam CG, per decimam huius, continuè proportionalem: resecta BC, aut eadem protracta, vt maior aut minor fuerit quàm EF (cuiusmodi hîc dupliciter figurauimus). Et connecto GA. Eritq́, per alteram partem decimæquintæ huius, Triangulum AGC, æquale Triangulo DEF: quum sit AC positum ad DF vt EF ad GC, & sit angulus C, angulo F æqualis. Itaque, per secundam partem septimæ Quinti, erit Trianguli ABC ad vtrunque ipsorum AGC & DEF, ratio eadem. Atqui Triangulum BAC, per primam huius, ad Triangulum AGC, est vt BC ad GC: sed BC ad GC ratio, est vt BC ad EF duplicata, per decimam Definitionem Quinti. Quare Trianguli

ABC

ABC ad Triangulum DEF ratio, est vt BC ad DF duplicata, Quod erat demonstrandum.

Iam verò si CG sit æqualis BC, erit, per alteram partem decimæquintæ huius, Triangulum ABC æquale Triangulo DEF. Æqualis autem proportio, quocunque modo multiplicetur, manet eadem: quum ab vnitate denominationem sumat, quæ ipsa sui est Quadrum, Cubus: ac in vniuersum in se ducta, semper sibi æqualis.

THEOREMA 14, PROPOSITIO XIX.

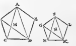
Theoni 20, Campano 18.

Similia Polygona, in similia totidemq; numero Triangula diuiduntur. Et Polygonum ad simile Polygonum duplam habet rationem, quàm latus ad similis rationis latus.

Sint Polygona similia, ac in præsens Penragona; ABCDE & FGHKL. Hæc dico diuidi in Triangula inter se similia, & numero æqualia: Atque insuper, esse vtrunque illorum ad alterum, vt proportio lateris AB ad FG latus simile duplicata.

Connectantur AC & AD: itidem FH & FK. Eritq́, propter similitudinem Polygonorum & per sextam huius, Triangulum ABC, Triangulo FGH æquiangulum: & Triangulum AED, Triangulo FLK. Ob id, quum Pentagona sint ex positu, æquiangula & laterũ proportionalium: erit & Triangulum ACD, Triangulo FHK æquiangulum. Sicq́, vtrunque alteri simile, per quartam huius & definitionem Similium Superficierum. Quare quum æqualia sint numero, patet prior pars.

Altera autem sic. Ducatur BD, quæ secet AC in puncto M: & GK, quæ secet FH in puncto N. Eritq́, propter similitudinem Polygonorum & per sextam huius, Triãgulum BCD, Triangulo GHK æquiangulũ: vnde & Triangulum ABM Triangulo FGN æquiangulum: Æquales enim sunt anguli BAM & GFN, & ab æqualibus auferuntur ABM & FGN: ob id, per trigesimamsecundam Primi, æquiangula. Eadem ratione AMD ipsi FNK æquiangulum: Quapropter ex quarta huius, BM ad GN vt AM ad FN: itidem AM ad FN vt MD ad NK. Igitur, per vndecimam Quinti, BM ad GN vt MD ad NK: & permutatim, BM ad MD vt GN ad NK. Sed, per primam huius, ABM ad AMD, & BCM ad CMD, vt BM ad MD: &, per eandem, FGN ad FNK, & GNH ad HNK, vt GN ad NK. Itaque ex decimatertia Quinti, ABC ad ACD vt FGH ad FHK: & permutatim, ABC ad FGH vt ACD ad FHK. Eadem ratione si intellexerimus ductas EC & LH, probabitur sic esse ACD ad FLK. Quare per decimamtertiam Quinti, erit totius Pentagoni ratio ad totum Pentagonum, vt ABC ad FGH: ob idq́, per antecedentem, vt AB ad FG duplicata, Quod erat demonstrandum.



SED hoc posterius caput in communi notione est. Nam quum Triangula in quæ resoluuntur Pentagona, sint æqualia numero, & inter se similia: erit per antecedentem, ratio ABC ad FGH vt BC ad GH duplicata: & AED ad FLK vt DE ad KL duplicata. Atqui eæ omnes duplicatæ rationes sunt æquales, quum earum simplices sint æquales, erit igitur, per decimamtertiam Quinti, ratio totius Pentagoni ad totum Pentagonum, vt vnius laterum ad suum simile, duplicata, Quod erat probandum.

Consect

Consectarium.

Si igitur tres lineæ proportionales fuerint: quanta est prima ad tertiam, tanta erit Superficies quæ super primam, ad Superficiem quæ super secundam: quum vtraque fuerit similis & similiter descripta.

Quod ex iam ascripta deductione manifestum euadit.

HVIC etiam Theoremati quidam aliud subijciunt Consectarium de Parallelogrammis Similibus, quòd in dupla sint ratione, quàm ipsorum latera similiter sumpta: Sed hoc patet vel ex Triangulorum similitudine. Triangula enim, vt iam non semel monuimus, dimidia sunt Quadrilaterorum. Immò & Theorema si de Rectilineis pronuntiasset, vniuersam peræquè habuisset probationem, atque de Polygonis.

PROBLEMA 6; PROPOSITIO XX.

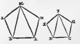
Theoni 19, Campano 18.

Super data linea, datæ Superficiei rectilineæ similem Superficiem similiterq; positam describere.

Sit data linea AB, data verò Superficies in præsens Pentagona, CDEFG. Volo super AB constituere Superficiem ipsi CDEFG similem & similiter positam.

Resoluo datam Superficiem in Triangula, ductis lineis DF & DG. Tum super puncto A, constituo angulum BAH, æqualem angulo C. Itidem super puncto B, constituo angulum ABH, æqualem angulo CDG: ducta BH, quæ concurrat cum AH ad punctum H.

Et erit, per trigesimamsecundam Primi, angulus AHB æqualis angulo CDG: ob id, per quartam huius, latera duorum Triangulorum GCD & HAB, proportionalia. Pono etiam angulum HBK, æqualem angulo GDF: & angulum BHK, angulo DGF: angulum verò KBL, angulo FDE: ac demùm angulum BKL, æqualem angulo DFE. Ac tum erit completum Pentagonum super linea AB, quale quærimus. Est enim in Triangula æqualia numero & æquiangula diuisum, vt Pentagonũ CDEFG. Quare eidem simile, Quod erat faciendum.



VT autem hoc loco obiter explicemus quid similiter positum dicatur in Superficiebus: id est, si occurrat Superficies, cuiusmodi est hoc loco, Pentagonum CDEFG, cui super linea AB sit constituenda Superficies similis & similiter descripta, vt attendamus an ipsa AB comparetur lateri DC an lateri DE, an breuiter cuipiam laterum Figuræ oblatæ: eamque lineam comparationi accommodemus. Posset enim fieri angulus BAH æqualis angulo CDE, atque eo instituto perfici Figura: quæ vt similis euaderet, non tamen similiter esset descripta. Quod satis manifestum est, quum Figura quæ proponitur, non est æqualium laterum.

THEOREMA 15; PROPOSITIO XXI.

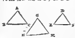
Campano 20.

Quæ eidem Rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

Sint duo Rectilinea ABC & DEF: sitq; vtrunq; illorum simile Triangulo GHK:

vt sit

vt ſit AB ad AC, & DE ad DF, ſicut BC & EF ad HK: & anguli vtriuſque proportionalibus lateribus contenti, æquales ſint angulis Trianguli GHK. Dico ambo eſſe ſimilia.



Nam, per vndecimam Quinti, erit AB ad AC & DE ad DF vt BC ad EF: ob idq́;, per quintam huius, erunt anguli ſub quibus latera proportionalia ſubtenduntur, æquales. Ambo igitur æquiangula: Quare, à definitione Similium Superficierum, inter ſe ſimilia, Quod fuit demonſtrandum.

Hoc Theorema per ſe fuit manifeſtum, velut animi Notio. Nam, vt anteà docuimus, Similitudo Superficierum eſt æqualitas quædam.

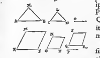
THEOREMA 16, PROPOSITIO XXII.

Theoni 21.

Si quatuor lineæ fuerint proportionales: erunt & ab eis Rectilinea ſimilia ſimiliterq́; poſita, proportionalia: Et ſi ab eis Rectilinea ſimilia ſimiliterq́; poſita, fuerint proportionalia: erunt & ipſæ proportionales.

Sint quatuor lineæ proportionales, AB, CD, EF & GH: vt AB ad CD, ſic EF ad GH: ſintq́, ab ipſis AB & CD, ſimilia ſimiliterq́, deſcripta Rectilinea, quæ ſint Triangula, ABK & CDL: Ab ipſis verò EF & GH, ſimilia ſimiliterq́; deſcripta, Parallelogramma MF & NH. Dico eſſe vt Triangulum ABK ad Triangulum CDL, ita Parallelogrammum MF ad Parallelogrammum NH.

Ponatur ad ipſas AB & CD, per decimam huius, tertia proportionalis O: ad ipſas quoque EF & GH, tertia proportionalis P. Et quoniam vt AB ad CD, ſic EF ad GH. ſed & vt CD ad O, ſic GH ad P: ex æquali igitur, per vigeſimamſecundam Quinti, vt AB ad O, ſic EF ad P. Sed vt AB ad O, ſic Triangulum ABK ad Triangulum CDL, per Conſectarium decimænonæ huius: Et per idem ipſum, vt EF ad P, ita Parallelogrammum MF ad Parallelogrammum NH. Vt igitur, per vndecimam Quinti, ABK Triangulum ad CDL Triangulum, ita MF Parallelogrammum ad NH Parallelogrammum, Quod eſt prius.



Sint vero duo Triangula ABK & CDL ſimilia & ſimiliter poſita: duoq́, Parallelogramma MF & NH, eiuſmodi. Dico eſſe AB ad CD vt EF ad GH.

Ponatur, per duodecimam huius, vt AB linea ad CD lineam, ita EF ad QR: & per vigeſimam huiuſce, deſcribatur ſuper QR, Parallelogrammum QRS, vtrique ipſorum MF & NH ſimile ſimiliterq́; poſitum. Et erit, per priorem partem huius, vt ABK Triangulum, ad CDL Triangulum, ſic MF Parallelogrammum, ad SR Parallelogrammum. Sed ſic fuit MF ad NH. Igitur per ſecundam partem nonæ Quinti, Parallelogrammum SR æquale eſt Parallelogrammo NH. Et quia ſunt ſimilia & ſimiliter poſita, æqualis erit linea GH, lineæ QR, per ſecundam partem decimænonæ huius. Nam quum ſit ratio NH Parallelogrammi ad SR Parallelogrammum, dupla quàm GH lineæ ad QR lineam, eaq́, æqualis: ipſa non niſi ex æquali produci poteſt. Quare vt AB ad CD, ita EF ad GH, Quod fuit demonſtrandum.

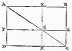
THEOREMA 17, PROPOSITIO XXIII.
Campano 22, Theoni 24.

In omni Parallelogrammo, quæ circa Dimetientem Parallelogramma, similia sunt toti, & inter se.

In Parallelogrammo ABCD, sint duo Complementa GH & FK, circa Dimetientem AC. Hæc dico esse toti BD & inter se similia.

Est enim, per secundam huius, BG ad GC, & DH ad HC, vt AE ad EC: ob id, coniunctim, BG ad CG & DC ad CH, vt AC ad CE. Quapropter, ex vndecima Quinti, BC ad CG vt DC ad CH, igitur & vt AB ad EG: quum AB sit æqualis DC, & EG æqualis HC.

Eadem argumentatione erit AD ad EH, vt AB ad EG, & vt DC ad HC.



Quia ergo Parallelogramma sunt æquiangula, erit per definitionem Similium Superficierum, GH simile toti BD. Haud dissimili ratione probabitur FK eidem BD toti simile: quum sit BA ad AK & DA ad AF, vt CA ad AE, per secundam huius & Coniunctam proportionalitatem. Quapropter ex vigesima huius, erit & FK simile GH. Sicq; constat propositio.

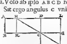
SED & hoc constabat ex Triangulis: ex iis scilicet quæ probauimus ad quartam huius. Quum enim duo Triangula ABC & EGC sint æquiangula, & laterum ad æquos angulos proportionalium: erit AB ad BC vt EG ad EC. Rursus quum ADC & EHC sint similia: erit AD ad DC vt EH ad HC. Quod & eodem argumento probabitur de duobus Triangulis AEF & AEK, ipsum FK Parallelogrammum complentibus. Sunt igitur FK & HC Parallelogramma, toti BD Parallelogrammo & inter se similia, Quod erat demonstrandum.

Ab hoc Theoremate non incommodè locum sibi inueniet hoc Problema, quanuis idipsum iam antè proponi potuisset.

Propositis duobus Parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus, ab vno illorum, Parallelogrammum alteri simile resecare.

Sint duo Parallelogramma ABCD & CEFG, æquiangula quidem, sed dissimilia. Volo ab ipso ABCD resecare portionem Similem ipsi CEFG.

Sit ergo angulus C vnius, æqualis angulo C alterius: Sicq; statuantur duo Parallelogramma, vt BG sit linea vna, & DE altera. Tum ducatur transuersa FCH, secans AD in puncto H: Et ducatur HK parallelus ipsi CD. Dico CDHK Parallelogrammum, ex AC Parallelogrammo resectum, esse simile ipsi EG Parallelogrammo.



Id verò satis constat ex hac vigesimatertia: quum ambo sint circa eandem Dimetientem. Atque ad clariorem notionem, perfeci ABGL Parallelogrammum. Hic etiam sibi locum inueniet hoc Problema,

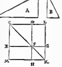
Inter duas Superficies rectilineas mediam Superficiē proportionalem inuenire.

Sint duæ Superficies rectilineæ A & B, inter quas sit collocanda media Superficies proportionalis.

Reduco ipsas ad duo Parallelogramma Similia, secundùm doctrinam decimæoctauæ huius: (vel, si placet, vtranque ad Quadratum, ex vltima Secundi). Et sint duo Parallelogramma CDEF & FGHK, similia inter se, & duabus Superficiebus A & B mutuò æqualia. Tum pono angulos qui ad F sunt æquales, alterum ex aduer-

so alt;

ſo alterius: vt ſint duo Parallelogramma E D & H G circa eandem Diametrum C K.



Et perficio Parallelogrammum C L K M. Dico alterutrum Supplemetitorum F L, & F M, eſſe medium proportionale inter C F & F K: hoc eſt, inter A & B: eſſe ſcilicet vt H G Superficies ad F L Superficiem, ſic eandem F L ad E D Superficiem. Eſt enim, ex bac vigeſimatertia Propoſitione, linea H F ad lineam F D, vt linea G F ad lineam F E: At, per primam buius, vt H F ad F D, ſic H G Superficies ad F L Superficiem: ſed & vt G F ad F E, ita F L Superficies ad E D Superficiem. Quare, per vndecimam Quinti, vt H G Superficies ad F L Superficiem, ſic eadem F L Superficies ad E D Superficiem, Quod fuit faciendum.

ALITER expeditiùs. Inter duas parallelos interminatas C D & E F, conſtituo Parallelogrammum C G E H, verbi gratia, Rectangulum: & inſuper, æquale Rectilineo A: per ea quæ docuimus ad quadrageſimamquartam Primi, ac eodem præcepto, inter ipſas parallelos conſtituo alterum Parallelogrammum K D L F, æquiangulum ipſi C H Parallelogrammo, & æquale ipſi B Rectilineo. Iam in linea



E F, inter ipſas C H & L D baſes, pono lineã M N media ratione proportionalem, per nonam huius. Ductiſq; M O & N P parallelis ipſis G H & D F, conſtituo Superficiem ęquidiſtantium laterum, M P. Hanc dico eſſe media ratione proportionalem inter duo C H & K F: ac proptereà inter A & B Rectilinea.

Eſt enim, per primam huius, vt C G baſis ad M N baſin, ſic C H Parallelogrammum ad M P: Et per eandem, vt M N baſis ad K D baſin, ſic M P ad K F. Quare, per vndecimam Quinti, vt C H ad M P, ſic M P ad K F, Quod fuit probandum.

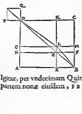
Sed nos priorem demonſtrationem aſtruximus, ad illuſtrandam vbique Figuram noſtram Gnomonicam.

THEOREMA 28, PROPOSITIO XXIIII.

Campano 23, Theoni 26.

Si duo Parallelogramma ſimilia & ſimiliter poſita, communem angulum habuerint, aut angulum æqualem angulo æquali contrà poſitum habuerint: ambo circa eandem Dimetientem conſiſtunt.

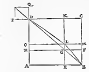
Sint duo Parallelogramma ſimilia & ſimiliter poſita, A B C D & E B F G, communem habentia angulum qui ad B. Hæc dico eſſe circa vnam Dimetientem. Sint & duo Parallelogramma E F & H K ſimilia ſimiliterq; poſita: ſitq; angulus G vnius, æqualis angulo G alterius: & vterque alteri contra poſitus. Dico etiamnum duo E F & H K Parallelogramma circa vnam Dimetientem conſiſtere.



Prius ſic probatur. Connectam B G & G D: quæ ſi vnica linea fuerit, patet Propoſitio. Sin minus, ſit B L D Dimetiens: & ducatur M L O, parallelus ipſi E B, quæ ſecet B C & A D in punctis M & O.

Et erit, per antecedentem, Parallelogrammum E M ſimile toti A C: quapropter erit C B ad M B vt A B ad E B. At, ex hypotheſi, C B ad F B vt A B ad E B. Igitur, per vndecimam Quinti, C B ad F B vt C B ad M B. Quare, per ſecundam partem nonæ eiuſdem, F B æqualis M B, pars toti, Quod minimè conuenit.

Secundum sic. Educta, vt modò, Dimetiente per L punctum, erit per antecedentem, MB ad EB vt KL ad LO (hoc est, vt KL ad GH). At ex hypothesi, FB ad EB vt KG ad GH. Quare per ipsam vndecimam Quinti, erit FB æqualis MB: & prætereà KL ipsi KG: contra commune Sensum.



ALITER compendiosiùs. Parallelogrammum EM simile est toti AC, per antecedentem: quapropter & minori EF, per vigesimamprimam huius & hypothesin: sicq; latera proportionalia: Eritq́, LM ad MB vt GF ad FB. Quum igitur GF sit ipsi LM æqualis: erit, per septimam Quinti, GF ad MB vt GF ad FB. Quare FB ipsi MB ęqualis, pars toti, Quod est absurdũ.

HVIVS Propositionis sententiam ideò ampliaui, vt etiam de Parallelogrammis cõnexis intelligeretur: qualia in constructione apparent AC & PQ. Dimetiens enim infinitè produci potest, & Parallelogramma similia circunscribi. Breuiter, vt hæc omni ex parte Conuersa esset antecedentis.

THEOREMA 19, PROPOSITIO XXV.

Theoni 23, Campano 24.

Aequiangula Parallelogramma, rationem habent compositam ex alternorum laterum ratione.

Sint duo Parallelogramma, ABCD & CEFG æquiangula, & sit angulus C vnius æqualis angulo C alterius. Dico rationem vnius ad alterum, compositam ex ratione quæ est BC ad CG, & quæ DC ad CE.



Ponam ambo Parallelogramma ex aduerso, vt BG sit linea vna, & DE itidem vna: & perficiam Parallelogrammum ABGH. Ponam insuper vt sit linea K ad lineam L, vt BC ad CG: & eadem L ad M lineam, vt DC ad CE, ex præcepto duodecimæ huius.

Eritq́, per primam huiusce & vndecimam Quinti, BD Parallelogrammum ad CH Parallelogrammum, vt K ad L: & DG Parallelogrammum ad CF Parallelogrammum, vt L ad M. Ex æquali igitur erit BD ad CF vt K ad M. Atqui ratio K ad M, producitur ex K ad L & ex L ad M: vt patet ex quinta Definitione huius. Communi igitur iudicio, producetur ratio BD ad CF, ex ratione BC ad CG & DC ad CE, Quod erat demonstrandum.

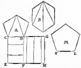
PROBLEMA 7, PROPOSITIO XXVI.

Theoni & Campano 25.

Dato Rectilineo, Rectilineum simile & alii dato æquale constituere.

Sint duo Rectilinea A & B. Volo Rectilineum construere, simile A, & ęquale B. Resoluto vtroque in sua Triangula, super vno laterum ipsius A, quod sit CD, constituo Parallelogrammum CDEF Rectangulum, æquale eidem A Rectilineo: per quadragesimamquartam Primi toties repetitam, quot fuerint Triangula. Tum per eandem, super linea DF, ad angulum datum ECD, constituo Parallelogrammum DFGH, æquale ipsi B Rectilineo. Eritq́, per vigesimamnonam Primi, & quartamdecimam eiusdem, tota CH vna Superficies æquidistantium laterum. Pono

postmod



postmodùm, per nonam huius, lineam KL mediam proportionalem inter CD & DG lineas: Ac super KL, per decimamnonam huius, constituo ipsi A Rectilineo simile Rectilineum M. Quod dico esse æquale ipsi B Rectilineo. Nam quum CD, KL, & DG sint continuè proportionales: erit, per Consectarium decimænonæ huius, Rectilineum constitutum super primam CD, ad ipsum M, constitutum super KL secundam, vt CD linea prima ad DG tertiam: ob id, per primam huius, vt CF ad FG: ob idq;, per priorem partem septimæ Quinti, vt A ad FG: ac proptereà, per secundam partem eiusdem, vt A ad B. Quare, per secundam partem nonæ eiusdem, erit M æquale B, Quod erat faciendum.

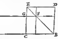
Sed erit promptius ex Permutata proportionalitate. Quum enim sit A ad M vt CF ad FG: erit permutatim, A ad CF vt M ad FG. Quum igitur sit A æquale CF, erit M æquale FG: Quare & æquale B, Quod erat constitutum.

THÉOREMA 20, PROPOSITIO XXVII.

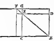
Campano 26.

Super dimidio lineæ Parallelogrammum descriptum, maius est Parallelogrammo, quod super eandem lineam proiectum, alteri quod priori sit simile similiterq; positum, specie deficit.

Sit linea AB, super cuius dimidio CB, descriptum sit Parallelogrammum CBDE, cuius Dimetiens BE: & super eandem AB sit proiectum AF Parallelogrammum, cuius vnum laterum secet latus CE in puncto G: deficiatq; specie, Parallelogrammo FB simili similiterq; posito ipsi CBDE. Dico Parallelogrammum CD esse maius Parallelogrammo AF.



Est enim, per primam huius, AG æquale CB: & per quadragesimamtertiam Primi, CF æquale FD. Itaque per communem Notionem, totus Gnomo CBDF, ipsi AF Parallelogrammo æqualis. Sed CD maius est ipso Gnomone: Quare & ipso AF Parallelogrammo, Quod fuit demonstrãdum. Tanto autem est maius, quantum est EF Parallelogrammum.



Iam verò si AF altiùs erigatur, quàm CD, vt in secunda Figura: maius etiamnum erit CD ipso AF. Est enim, per primam huiusce, AG æquale GB. Ablatis ergo vtrinque duobus Supplementis Parallelogrammi EB inter se æqualibus: erit CD tanto maius AF, quantum est EF Parallelogrammum.

PROBLEMA 8, PROPOSITIO XXVIII.

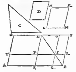
Campano 27.

Super data recta linea, dato Rectilineo æquale Parallelogrammum aptare, deficiens specie Parallelogrammo, quod simile sit dato. Modò tamen Rectilineum datum maius non sit Parallelogrammo, quod super

dimidio lineæ datæ, simile Parallelogrammo dato constituitur.

Sit data linea A B, datumq́, Rectilineum C: datum verò Parallelogrammum D. Volo super linea A B sic designare Parallelogrammum æquale Rectilineo C, vt deficiat specie Parallelogrammo, quod sit simile Parallelogrammo D. Oportet autem C non esse maius Parallelogrammo, super dimidium datæ lineæ A B collocato, simili eidem D Parallelogrammo. Alioqui niteremur in præceptum antecedentis Propositionis.

Diuido A B per æqualia in puncto E: & per decimamnonam huius, super dimidium B E, constituo Parallelogrammum E F, simile ipsi D. Tum super tota A B, compleo Parallelogrammum A B F G. Quum ergo C Rectilineum, non sit maius E F Parallelogrammo: si sit eidem æquale, erit Parallelogrammum E G quale volumus, per vigesimā huius. Est enim simile ipsi E F: quum sit eidem æquale & æquilaterum. Sin erit C minus, auferatur excessus ab ipso E F, per ea quæ demonstrauimus ad quadragesimamquintam Primi: cui excessui ponatur, per vigesimamsextam huius, æquale Parallelogrammum H K L M, & ipsi D simile. Ducam igitur in E F Parallelogrammo, Dimetientem B N: Et resecabo ex F N, partem N O, æqualem lateri H K. Et ex E N, partem N P, æqualem lateri H L. Et ducam O Q & R P, quæ se scindant in puncto S: quæq́; mutuo æquidistent lateribus totius Parallelogrammi A F. Eritq́, intersectio ipsarum in Dimetienre B N, per vigesimamquartam huius: quia N S æquale & simile ipsi H M. Producta demùm R P in A G ad punctū T, dico Parallelogrammum A S esse quale proponitur. Deficit enim specie, Parallelogrammo Q R, quod est simile N S Parallelogrammo, per vigesimamtertiam huius: atque ob id, ipsi H M: quapropter & ipsi D. Sed & æquale ipsi C Rectilineo. Nam quum A P, per primam huius, sit æquale E R: & per quadragesimamtertiam Primi, E F æquale S F: erit, per animi Notionem, ipsum A S, Gnomoni æquale: At Gnomon ipsi C æqualis: est enim N S excessus totius E F supra C Rectilineum. Quare & A S ipsi C Rectilineo æquale. Et idipsum super linea A B constitutum, deficit specie Parallelogrammo Q R (quod est simile ipsi D dato), Quod faciendum fuit.



H O C autem Theorema cum iudicio tractandum est: vt etiam hoc ipso loco annotauit Nicolaus Tartalea Brixellensis, vir in re Geometrica seriò versatus.

Sit enim, vt ipse in exemplum proponit, area C Rectilinei vigintiduorum pedum: & A B lineæ longitudo, duodecim: sed D Parallelogrammi longitudo, sit sua latitudine duplo maior. Tum si ponatur B E longitudo: quum ipsa sit 6, erit B F 3. Ac tum A S constitui non poterit in Parallelogrammum quale quærimus: nempè, quin sit maius ipso E F. Nam E F erit 8 pedum. At si ponatur B E latitudo, erit B F longitudo 12: & E F Parallelogrammum, erit 72. Ac tum demùm stabit Problema. Quamobrem ea cautio erit, ne longitudo in B E dimidio lineæ ponatur.

Hoc igitur Problema, vt nihil dissimulemus, eo minus Geometricum est, quo minus vniuersale. Quinetiam in errorem inducere possit bene exercitatos. Quod ego longiori sermone non explicabo. Satis fuerit admonuisse de errore vitando.

PROBLEMA 9, PROPOSITIO XXIX.
Campano 28.

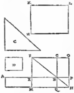
Ad datam lineam dato Rectilineo æquale Parallelo-

grammum

grammum prætendere, excedens specie Parallelogrammum simile dato.

Sit data linea A B, datumq; Rectilineum C, & datum Parallelogrammum D. Volo ad A B lineam, applicare Parallelogrammum æquale Rectilineo C, excedens specie Parallelogrammum D.

Diuido A B bipartitò in puncto E: Ac per decimamnonam huius, super dimidiam B E constituo B E F G Parallelogrammum simile D. Parallelogrammo. Tum, per vigesimamsextam huiusce, facio H K L Parallelogrammum, ambobus C & B E F G æquale, & ipsi D simile: ac proindè ipsi B E F C.



Et quia H K L maius est ipso B E F G, & eidem simile: maiora quoque sunt latera K H & K L, lateribus F E & F G. Producantur ergo F E & F G ad æqualitatem ipsorum K H & K L: & perficiatur Parallelogrammum F M N O, simile & çquale ipsi H K L, ac proindè æquale vtrisque C & E G: & insuper, simile ipsi E G, per vigesimam huius: ob idq;, circa eandem Dimetientem per vigesimamquartam eiusdem: quæ Dimetiens sit F N, educta per punctum B. Et producatur A B, donec secet O N in puncto P: perficiaturq; Parallelogrammum A N. Quod dico esse quale voluimus: scilicet, excedere Parallelogrammum D, Parallelogrammo Q P, quod est simile ipsi D.

Id verò constabit, protracta G B, donec secet M N in puncto Q. Est enim, per primam huius, A M æquale M B: & per quadragesimamtertiam Primi, communemque Notionem, æquale ipsi G P. Si ergo vtrique addatur E N: erit & per animi Notionem, A N æquale Gnomoni E N G. Atqui Gnomo est æqualis ipsi C Rectilineo: quum totum F M N O Parallelogrammum, positum sit æquale vtrisque C & E G. Quare A N est æquale ipsi C. Sed & simile ipsi E G, per vigesimamtertiam huius: ac proindè ipsi D, per vigesimam eiusdem, Quod facere oportuit.

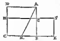
PROBLEMA 10, PROPOSITIO XXX.

Campano 29.

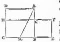
Datam rectam lineam secundùm extremam & mediam rationem diuidere.

Quid sit lineam secundùm mediam & extremam rationem diuidi, ostendit tertia Definitio huius Sexti.

Sit data linea A B diuidenda secundùm mediam & extremam rationem. Ex ipsa A B describo Quadratum A B C D: & per antecedentem, applico ad latus B C, Parallelogrammum C E F, æquale Quadrato A C, excedens specie Parallelogrammum eidem A C simile: & latus F H æquidistans C E, secet lineam A B in puncto G. Dico lineam A B esse diuisam secundùm mediam & extremam rationem, in ipso G puncto: esse scilicet A B ad B G vt B G ad G A.



Quum enim B F sit Quadratum, nempe simile ipsi A C: duæ B G & G F sunt æquales. Sed & G H ipsi A B æqualis: vtpotè æqualis ipsi A D, per trigesimamquartam Primi. Et quia A C & H E sunt çqualia, dempto ab vtroque C G, supererunt D G & G E æqualia. Quumq; angulus G vnius, sit æqualis angulo G alterius: erunt ipsorum latera reciprocæ rationis, per decimamquartam huius. Quapropter H G ad G F vt B G ad G A. Et quia A B



est æqualis HG, & GF ipsi BG: erit AB ad BG vt BG ad GA, Quod erat constitutum.

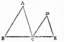
ALITER probatur ex secunda parte decimæseptimæ huius. Constat enim DG esse id quod fit ex AB in AG: item BF esse Quadratum ex BG. Quare tres lineæ AB, BG & GA sunt proportionales, Quod erat faciendum.

THEOREMA 21, PROPOSITIO XXXI.

Campano 30, Theoni 32.

Si duo Triangula ad vnum angulum sic constituantur, vt duo latera duobus lateribus mutuò sint æquidistantia, & eadem inter se proportionalia: duo reliqua ipsorum latera in directum erunt, & linea vna.

Sint duo Triangula ABC & CDE, ad angulum ACD sic constituta, vt latus AB æquidistet lateri DC, & AC ipsi DE: sitq; AB ad DC vt AC ad DE. Dico duas bases BC & CE esse in lineam vnam.



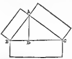
Est enim propter æquidistantiam laterum, vterque angulorum A & D, angulo ACD æqualis: per priorem partem vigesimænonæ Primi: ob id, inter se æquales. Quum igitur latera ipsos angulos continentia, sint proportionalia: erunt Triangula, per sextam huius, æquiangula: & angulus B, æqualis angulo DCB: angulusq; ACB, æqualis angulo E. Itaque, per trigesimamsecundam Primi, tres anguli qui ad C, duobus rectis sunt æquales. Quare, per decimamquartam Primi, duę lineæ BC & CE sunt in directum, & in lineam vnam, Quod erat demonstrandum.

THEOREMA 22, PROPOSITIO XXXII.

Campano 31.

In Triangulis Rectangulis, quæ à maximo laterum producitur Species, æqualis est iis quæ à duobus reliquis lateribus similes similiterq; positę producuntur, Speciebus.

Sit Triangulum ABC, cuius angulus A rectus. Dico Speciem quæ à maximo latere BC producitur, esse æqualem ijs quæ à duobus lateribus AB & AC ipsi Speciei BC similes & similiter positæ producuntur.



Ab angulo A demittam AD perpendicularem ad latus BC. Et erunt duo Triangula ABD & ADC, similia toti ABC Triangulo & inter se, per octauam huius. Quapropter, ex Consectario eiusdem, exurgunt duæ proportionalitates ternarum linearum: scilicet BC ad CA, vt CA ad CD: itemq; CB ad BA, vt BA ad BD. Itaque ex Consectario decimænonæ huius, Species quæ ex BC prima, ad eam quæ ex CA secũda, similiter describitur, est vt BC prima ad CD tertiam: itemq; Species quæ ex CB prima, ad eam quæ ex BA secunda, similiter describitur, est vt CB prima ad BD tertiam. Species igitur quæ ex BC, ad eas quæ ex CA & BA simul, est vt BC linea ad BD & DC simul. Atqui BC æqualis est ipsis BD &

DC

D C. Æqualis est igitur Species quæ ex B C, duabus quæ ex C A & B A similiter describuntur, Quod erat demonstrandum.

HVIVS Demonstrationis conclusio simplex (est enim citra autoritatis testimonium) apertior est, & obscuritatem tollit. Si quis verò rationem à se exigere velit, sic expendat. Species quæ ex A C, ad Speciem quæ ex C B similiter describitur, est vt D C ad C B, per ipsum Consectarium decimænonæ & Conuersam proportionalitatē: itemq́, Species quæ ex A B, ad eam quæ ex ipsa B C similiter describitur, est vt B D ad eandem B C. Iam verò ponatur Species A C prima, & Species B C secunda: linea verò D C tertia, & B C quarta. Et insuper, Species A B quinta, linea verò B D sexta. Ac tum, ex vigesimaquarta Quinti, erũt Species A C prima & Species A B quinta simul, vt linea D C tertia & B D sexta, ad B C quartam. Atqui B C linea est æqualis duabus B D & D C. Igitur & Species quæ ex B C, æqualis est duabus quæ ex A C & A B, Quod fuit demonstrandum.

ALITER. Similes Figuræ duplam inter se habent rationem quàm similis rationis latera, per vigesimam huius. Species igitur quæ ex B C, ad Speciem quæ ex C A similiter descriptam, erit vt Quadratum quod ex ipsa B C, ad Quadratum quod ex C A: quum vtrinq, sit dupla ratio quàm laterum. Eodem modo quæ ex B C Species, ad eam quæ ex B A similiter describitur, erit vt Quadratum ipsius B C ad Quadratum ipsius B A. Quapropter & sicut Species quæ ex B C ad duas quę ex C A & B A, sic Quadratum quod ex eadem B C ad duo quæ ex C A & B A Quadrata. At Quadratum quod ex B C, æquum est Quadratis quæ ex C A & B A, per quadragesimamseptimam Primi. Quare Species quæ ex B C, æqualis est duabus quæ ex C A & B A similiter descriptis Speciebus. Quod fuit demonstrandum.

Hæc igitur generatim complectitur Pythagoricam, scilicet quadragesimamseptimam Primi: & per ipsam (quodam tamen veluti præpostero modo) probatur. Illa enim ex hac innotescere debuit. Geometria quippè generatim & in vniuersum, quantùm potest, proponit. Sed tamen Quadrati dignitas separatam ac peculiarem sibi demonstrationem assumere potuit.

Conuersa autem huiusce, ex Campani Demonstratione erit eiusmodi.

Si quæ ab vno laterum Trianguli fit Species, æqualis fuerit ijs quæ à duobus reliquis lateribus fiunt, Speciebus similibus similiterq́ descriptis: Rectangulum est Triangulum.

Sit Triangulum A B C: sitq́, Species quæ ex B C, æqualis duabus quæ ex A B & A C similiter describuntur. Dico angulum A esse rectum.



Ponam angulum C A D rectum: Et connectam D C. Eritq́, per hanc trigesimamsecundam, Species quæ ex C D, æqualis duabus quæ ex A C & A D similiter describuntur: Quapropter & æqualis ei quæ ex B C simili: quum hæc quoque sit, ex positu, æqualis duabus quæ ex A C & A D. Erit ergo linea D C ipsi B C æqualis. Quare, per octauam Primi, angulus B A C rectus, Quod erat ostendendum.

Poterit & ab impossibili demonstrari, quomodo vltimã Primi probauimus. Quod satis intelliget, qui nostram Demonstrandi rationem illîc perceperit.

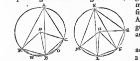
THEOREMA 23, PROPOSITIO XXXIII.

In Circulis æqualibus, anguli & qui ad Centra, & qui ad Peripherias consistunt, inter se sic habent, vt Arcus illos angulos suscipientes. Sed & sic Sectores inter se.

Sint Circuli æquales, ABC, cuius Centrum D: & EFG, cuius Centrum H: sintq́, ad Centra, duo anguli BDC & FHG: duo item ad Peripherias, BAC & FEG. Dico primùm ipsos BDC & FHG angulos inter se, duosq́; BAC & & FEG inter se eam habere rationem, quam Arcus BC ad Arcum FG.

Connectam rectas BC & FG. Et continuabo ipsis duobus Arcubus alios Arcus æquales, siue eodem numero, siue dispari: sitq́, Arcus BK, per vigesimamseptimam Tertij, ipsi BC æqualis: duo verò FL & LM, ipsi FG Arcui, per eandem, æquales: nempè ducta linea BK, quæ sit rectæ BC æqualis, per primam Quarti: & per eandem, FL & LM, quæ sint ipsi FG æquales. Hinc connectam KD & KA: indè verò LH & MH: tum LE & ME.

Et erunt, per vigesimamsextam Tertij, anguli qui ad D, inter se æquales: & qui ad H, inter se: itemq́, qui ad A, inter se æquales: & qui ad E, inter se. Quàm multiplex igitur est Arcus KC ipsius Arcus BC, tam multiplex angulus KDC anguli BDC, & angulus KAC ipsius BAC. Eodem quàm multiplex est Arcus MG ipsius Arcus FG, tam multiplex angulus MHG, anguli FHG: angulusq́, MEG, anguli FEG. Quapropter si Arcus KC est æqualis Arcui MG, est & angulus KDC æqualis angulo MHG: & angulus KAC, angulo MEG: & si maior, maior: & si minor, minor. Quare per sextam definitionem Quinti, erit Arcus BC ad Arcum FG, vt angulus BDC ad angulum FHG, atque angulus BAC ad angulum FEG, Quod est prius.



Dico insuper, esse Sectorem DBC ad Sectorem HFG, vt est ipse Arcus BC ad Arcũ FG. In ipsis BC & BK Arcubus, suscipiantur duo signa N & O: & connectantur BN, KN: BO & CO. Eritq́, Triangulum BDC, æquale Triangulo BDK: per definitionem Circuli & quartam Propositionem Primi: quum sint anguli qui ad D, æquales. Et quoniam Arcus BC æqualis est Arcui BK, erit reliquus BCK, reliquo BKC æqualis: Quapropter angulus BOC æqualis angulo BNK, per vigesimamsextam Tertij. Duo igitur Segmenta BNK & BOC, similia, per decimam Definitionem Tertij: quapropter & æqualia, per vigesimamtertiam Propositionem eiusdem. Totus igitur Sector DBC, toti Sectori DBK est æqualis. Eadem argumentatione erunt Sectores HML, HLF, & HFG inter se æquales. Æquemultiplex igitur est Sector DCK, Sectoris DBC, vt Arcus CK ipsius Arcus CB: & Sector item HGM æquemultiplex Sectoris HGF, vt Arcus GM ipsius Arcus GF. Si itaque fuerit æqualis Arcus CK, Arcui GM, erit & Sector DCK æqualis Sectori HGM: & si maior, maior: & si minor, minor. Quare, per Conuersam sextæ Definitionis Quinti, vt Arcus BC ad Arcum FG, sic Sector DBC ad Sectorem HFG, Quod erat demonstrandum.

Ex iis consequitur, vt est Sector ad Sectorem, sic esse angulum ad angulum.

Libri Sexti Elementorum Geometricorum

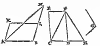
FINIS.

L E C T O R I.

In hac operis nouitate quàm difficile fuerit omnia integra præstare, nobis tacentibus, res ipsa loquitur. Nostrum verò officium fuit, vt de erratis, quæ à nobis ante emissionem internosci potuerunt, te moneremus. Quorum bonam partem sub prælo deprehendimus, & in reliquas chartas restituimus: nequis interim ex ijs locis quos hoc catalogo pro mendosis citauimus, plerosq; integros esse miretur. Cæterùm quæ diligentiam nostram effugerunt, tuum erit benignè condonare.

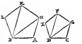
Pagina 3, *linea* Superficiei *pro* Sphericæ *lege* Circularis
Pagina 4, *linea* Angulum Rectum *pro* sectionis *lege* intersectionis
Pagina 6, *linea* Definitionis *& sequenti, ab ijs verbis* vnica linea *sic repone*; vnica linea contineatur: sed quatenus Superficies, pluribus contineri possit.
Pag. 13, *linea vltima, pro* Circulum *lege* Circulorum
Pag. 16, *linea* dicij *pro* quas, quia *lege* quas, quanquam
Pag. 18, *linea* ABC, cuius *pro* & Triangulum ACD, cuius basis AD *lege* & Triangulum ACB, cuius basis AB
Pag. 26, *linea* manifextam *pro* ipso BDC *lege* ipso BEC
Pag. 32, *linea* A puncto *pro* perpendicularem AB *lege* perpendicularem AD
Pag. 37, *linea* rallelam *lege* parallelum

Pag. 43, *in Figura quæ initium habet Pagina, deest nota* B. *Sic ergo reponenda*



Pag. eadem, lin. datur *pro* datur ipsius parallelus interminata *lege* dantur duæ paralleli interminatæ.
Pag. 49, *linea* cie *lege* cies
Pag. 58, *linea* enim *expunge* ex
Pag. 65, *linea* figura, *pro* & BG *lege* & FG
Pag. eadem, lin. ÆQVALES *deest Figura huic loco accommoda, sed quam Lector facilè subaudiat.*
Pag. 66, *linea* ctis B & E *pro* Hanc etiam *lege* Hanc etiam BE
Pag. 75, *linea* BAC *pro* si BAH *lege* si BAC
Pag. 76, *linea* lorum KAH *pro* KAH & NAF *lege* KAH & NAM
Pag. 78, *linea* cti, omninò *pro* DE *lege* ST
Pag. 90, *linea* ctis lineis *vbi sic legitur* æqualis angulo D dato, Quod fuit faciendum. *sic repone* æqualis angulo EAB, per trigesimamprimam huius: Quare & angulo D dato, Quod fuit faciendum. *Erat enim ob Laconismum obscura conclusio.*
Pag. 109, *linea* pterea *pro* tertia pars *lege* sexta pars
Pag. 124, *linea* ipsius *vbi legitur* Eruntq́, vt FK *expunge* vt
Pag. 135, *linea* pani *pro* incitando *lege duabus vocibus* in citando
Pag. 140, *lin.* les habent *pro* habent *lege* continent
Pag. 140, *linea* Id est, *pro* linea *lege* lineam
Pag. 143, *linea* CB *lege* CE

Pag. 156, *Figuram vigesimæquartæ Propositionis sic repone, vt pro lineis* AK *&* CF, *ducantur* BH *&* DG, *iuxta Demonstrationis sententiam.*



14

Mercurius in Clemens u. Zuchalt

135